Problema: utilizzo dei cerchi di Mohr per studiare la deformazione (12 gennaio)

In un punto di un continuo di Cauchy, indicato con ε un parametro adimensionale, e indicata con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale, il tensore della deformazione ha il seguente aspetto:

$$\underset{\sim}{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È possibile adoperare la costruzione di Mohr per determinare la direzione lungo la quale la dilatazione è massima?

Come?

Problema: utilizzo dei cerchi di Mohr per studiare la deformazione (12 gennaio)

giovedì 26 dicembre 2019 15:33

La costruzione dei cerchi di Mohr può essere effettuata per qualsiasi matrice simmetrica, quindi anche per la matrice di deformazione pura $\underline{\underline{E}}$. Nella base di versori ortonormali $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ dello spazio, la matrice data assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon/2 & 0 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Avendo fissato la base, è possibile identificare i vettori anche attraverso le loro componenti in questa base.
La direzione $\underline{k}$ è una direzione principale, associata all'autovettore nullo. Infatti:

$$\underline{\underline{E}}\,\underline{k} = \underline{0} .$$

Per costruire la circonferenza di Mohr, si introduce un generico versore $\underline{n}$ ortogonale a $\underline{k}$ ed un versore $\underline{m}$ sempre ortogonale a $\underline{k}$ ma ruotato di $\pi/2$ in senso orario rispetto ad $\underline{n}$ (visto da $\underline{k}$).
Scegliendo opportunamente $\underline{n}$ ed $\underline{m}$ si possono identificare dei punti notevoli del piano avente ε_n in ascissa e $\frac{1}{2}\gamma_{nm}$ in ordinata su cui basarsi per tracciare la circonferenza richiesta. Con ε_n si indica la dilatazione lungo la direzione $\underline{n}$, con γ_{nm} si indicano gli scorrimenti angolari delle fibre ortogonali e disposte secondo le direzioni $(\underline{n}, \underline{m})$ prima della deformazione.
In particolare, scegliendo $\underline{n} = \underline{j}$ ed $\underline{m} = \hat{\underline{i}}$ si ottiene:

$$\varepsilon_{(\hat{j})} = \underline{j} \cdot \underline{\underline{E}}\,\underline{j} = 0 ;$$

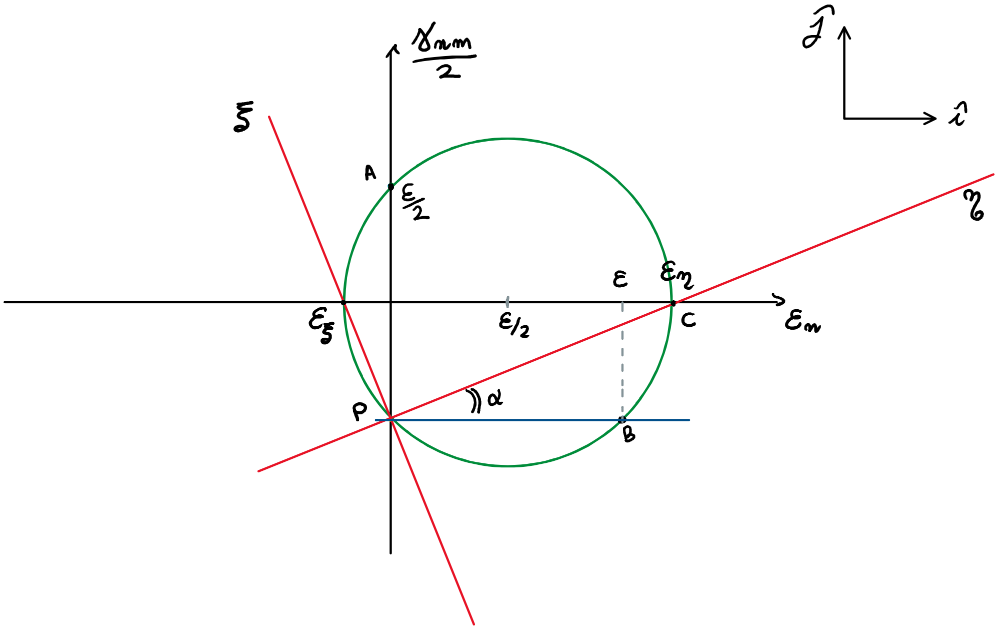
$$\frac{\gamma_{(\hat{j})(\hat{i})}}{2} = \underline{i} \cdot \underline{\underline{E}}\,\underline{j} = \varepsilon/2 ;$$

Si identifica così il punto $A\,(0, \varepsilon/2)$.
Analogamente, scegliendo $\underline{n} = \underline{i}$ e $\underline{m} = -\underline{j}$ si ottiene:

$$\varepsilon_{(\hat{i})} = \underline{i} \cdot \underline{\underline{E}}\,\underline{i} = \varepsilon ;$$

$$\frac{\gamma_{(\hat{i})(-\hat{j})}}{2} = -\underline{j} \cdot \underline{\underline{E}}\,\underline{i} = -\frac{\varepsilon}{2} ;$$

da cui il punto $B\,(\varepsilon, -\varepsilon/2)$.
Si rappresentano i due punti sul piano, avendo cura di orientare gli assi $\left(\varepsilon_n, \frac{\gamma_{nm}}{2}\right)$ parallelamente ai versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$. Il punto medio del segmento AB si trova sull'asse delle ascisse. Dai punti A e B si tracciano le rette parallele alle normali corrispondenti, assi y ed x rispettivamente. La loro intersezione determina P, il polo della rappresentazione di Mohr. Si traccia la circonferenza di Mohr imponendo che questa passi per i punti A, B e P. Il suo centro coincide con il punto medio di AB.

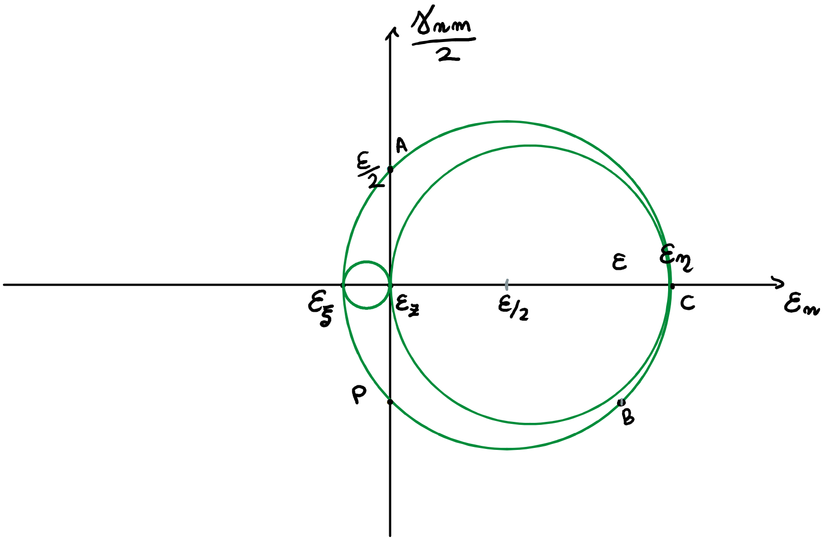


Graficamente si osserva subito che il punto per cui la dilatazione è massima è il punto C. Da considerazioni geometriche, osservando che il raggio della circonferenza è pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$ e che l'ascissa del centro della circonferenza è pari a $\varepsilon/2$, si deduce che il valore della massima dilatazione (ascissa di C) è pari a $\varepsilon_{max} = \varepsilon_\eta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\varepsilon$.

Per individuare la corrispondente direzione (che coincide con una direzione principale) si congiunge il polo P con il punto C. Da considerazioni trigonometriche si osserva che questa nuova direzione individuata, indicata con η, forma con l'asse delle x un angolo α pari a:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon/2}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{8} \quad .$$

L'altra direzione principale ξ sarà inclinata di $\frac{5}{8}\pi$ rispetto all'asse delle x.
È possibile rappresentare sul piano anche la dilatazione relativa all'asse z, che è asse principale, ottenendo così le seguenti 3 circonferenze della rappresentazione di Mohr.



Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi