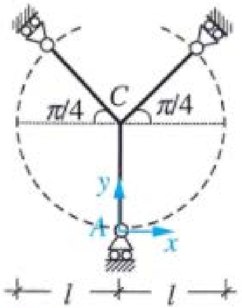
Determinazione della matrice cinematica Es. 2.1 Casini Vasta 3a edizione

1) La struttura in figura è costituita da tre travi saldate in corrispondenza del punto C in modo da **costituire un unico corpo rigido.**

2) Si scelgano i parametri lagrangiani per la struttura in figura e si riporti la costruzione della matrice cinematica, spiegando i passaggi.

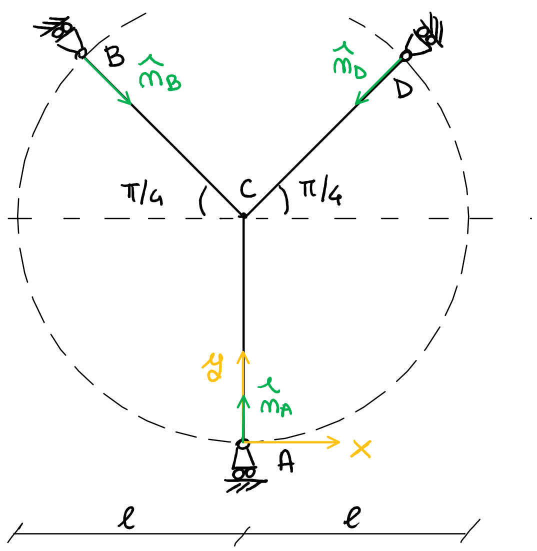
3) Si classifichi la struttura.



E2.1

Esercizio E2.1

martedì 22 ottobre 2019 15:26



Il sistema in esame è costituito da un unico corpo rigido vincolato a muoversi nel piano, per cui $n = 3$, dove n è il numero di gradi di libertà del corpo.
Si sceglie il punto A come origine del sistema di riferimento e come polo di riduzione degli spostamenti. In questo modo si possono esprimere le coordinate dei punti A, B e D come:

$A(0;0)$ $\qquad B(-\ell\sqrt{2}/2\,;\ \ell+\ell\sqrt{2}/2)$ $\qquad D\left(\ell\sqrt{2}/2\,;\ \ell+\ell\sqrt{2}/2\right)$.

Si scelgono come parametri lagrangiani le due componenti dello spostamento del punto A, u_A lungo l'asse x e v_A lungo l'asse y, e l'angolo ϑ di rotazione del corpo. Si definisce così il vettore dei parametri lagrangiani $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$:

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} \vec{u}_A \cdot \hat{i} \\ \vec{u}_A \cdot \hat{j} \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \vartheta \end{pmatrix}.$$

La formula generale dello spostamento per punti rigidamente connessi al corpo in esame risulta essere $\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\vartheta} \times \vec{AP}$, che proiettata nelle due direzioni spaziali $\hat{i}$ e $\hat{j}$ fornisce:

$$(*) \qquad \begin{cases} u_P = u_A - \vartheta\, y_P \\ v_P = v_A + \vartheta\, x_P \end{cases}.$$

Il corpo è vincolato attraverso tre carrelli, si ha dunque un totale di vincoli semplici m pari a 3.
Le prestazioni cinematiche dei vincoli si scrivono come:

$$\begin{cases} \vec{u}_A \cdot \hat{m}_A = 0 \\ \vec{u}_B \cdot \hat{m}_B = 0 \\ \vec{u}_D \cdot \hat{m}_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ u_B \sqrt{2}/2 - v_B \sqrt{2}/2 = 0 \\ -u_D \sqrt{2}/2 - v_D \sqrt{2}/2 = 0 \end{cases}$$

avendo definito i versori che identificano la direzione dell'asse di ciascun carrello come
$\hat{m}_A = \hat{j}$, $\hat{m}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$, $\hat{m}_D = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$.

Attraverso le $(*)$ si possono esprimere gli spostamenti dei punti B e D in funzione dei parametri lagrangiani:

Attraverso le (*) si possono esprimere gli spostamenti dei punti B e D in funzione dei parametri lagrangiani:

$$u_B = u_A - \theta \ell \left(1+\sqrt{2}/2\right)$$
$$v_B = v_A - \ell\theta \sqrt{2}/2$$
$$u_D = u_A - \theta \ell \left(1+\sqrt{2}/2\right)$$
$$v_D = v_A + \ell\theta \sqrt{2}/2$$

pertanto le prestazioni cinematiche dei vincoli si possono scrivere come:

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\theta\ell\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u_A + \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\theta\ell\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ell\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\theta\ell = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u_A + \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\theta\ell = 0 \end{cases}.$$

Il sistema può essere riscritto in forma vettoriale come $\underline{A}\,\underline{q} = \underline{0}$, introducendo la matrice cinematica $\underline{A}$ di ordine $m \times n$ data in questo caso da:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{pmatrix}.$$

Il rango p della matrice $\underline{A}$ è pari a 2. Essendo $m = n > p$, si ha che il sistema è cinematicamente degenere, si è nel caso di vincoli mal posti. Per il teorema di Rouché-Capelli esistono ∞^1 soluzioni.
Graficamente, si osserva infatti che il sistema ammette un unico centro di rotazione in C per il teorema di Chasles, dunque esiste un campo di spostamento non nullo del sistema.

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi