Problema: formulazione del problema dell'equilibrio per una sfera elastica sotto pressione.

Questo problema serve a verificare se l'allievo ha compreso la formulazione del problema dell'equilibrio elastico lineare. Darò delle indicazioni per lo svolgimento alla ripresa delle lezioni.

Chi riesce a svolgere per intero questo problema può essere certo di aver compreso cosa significa formulare il problema dell'equilibrio in elasticità.

Una sfera elastica, omogenea e isotropa avente raggio R è soggetta a una pressione uniforme $p>0$ sulla superficie e a forze a distanza nulle.

1) Scrivere la formulazione del problema dell'equilibrio elastico.

2) Verificare la risolubilità del problema.

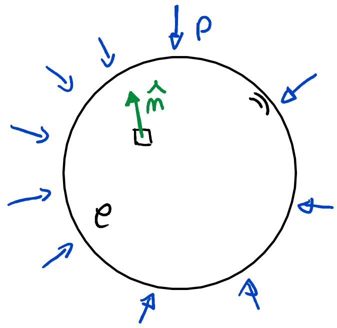
3) Determinare una soluzione.

Problema: formulazione del problema dell'equilibrio per una sfera elastica sotto pressione.

giovedì 9 gennaio 2020 08:40

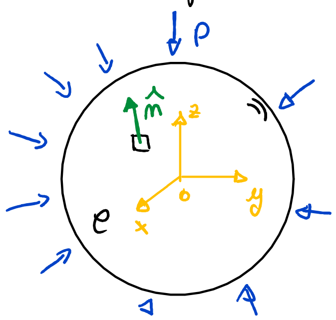
(1.) Si considera un continuo di Cauchy in regime di spostamenti infinitesimi, elastico lineare isotropo e omogeneo che occupa la configurazione $\mathcal{C}$ di forma sferica.
Indicato con $\hat{n}$ la normale alla superficie in ogni punto, come da figura, si indicano le forze di superficie che agiscono sulla superficie non vincolata S_f con:

$$\vec{f}(P) = -p\hat{n} \, ,$$



dove P è il generico punto della superficie e p è il valore della pressione uniforme dato.
Il corpo $\mathcal{C}$ non è vincolato, per cui $S_u = \emptyset$, dove con S_u si indica la porzione di frontiera $\partial\mathcal{C}$ vincolata. Vale la relazione $\partial\mathcal{C} = S_u \cup S_f$.
Non si hanno forze di volume agenti su $\mathcal{C}$, dunque $\vec{b}(P) = \vec{0}$.
Il problema dell'equilibrio elastico consiste nella determinazione delle 6 componenti di tensione (gli elementi del tensore degli sforzi $\underline{T}(P)$), delle sei componenti di deformazione (gli elementi della matrice di deformazione $\underline{E}(P)$) e delle tre componenti dello spostamento $\vec{u}(P)$.

(2.) Poiché $S_u = \emptyset$, affinché il problema sia risolubile è necessario che la risultante delle forze ed il momento risultante siano uguali a zero. Si sceglie un sistema di riferimento cartesiano la cui origine coincide con il centro della sfera. Grazie alla simmetria della sfera, gli assi scelti saranno direzioni principali di tensione. Individuato un sistema di riferimento, è possibile esprimere le grandezze attraverso le loro componenti nel sistema scelto.



L'espressione per il calcolo della forza risultante assume la seguente forma:

$$\int_{\mathcal{C}} \underline{b}\, dV + \int_{\partial\mathcal{C}} \underline{f}\, dA = \int_{\partial\mathcal{C}} (-p\hat{n})\, dA = \vec{0} \, .$$

Data la simmetria del corpo, si osserva che i contributi della pressione si elidono tutti, essendo a due a due uguali in direzione e modulo ma opposti in verso.
Per il calcolo del momento risultante si sceglie come polo il centro della sfera O.

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \vec{OP} \times \vec{f}(P)\, dA = \int_{\partial\mathcal{C}} (r\hat{r}) \times (-p\hat{n})\, dA = \vec{0}.$$

La direzione radiale $\hat{r}$ coincide punto per punto con $\hat{n}$, dunque il prodotto vettoriale restituisce il vettore nullo.

(3.) Data la simmetria della figura, il tensore degli sforzi assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Secondo la consueta notazione, le tensioni principali sono dunque:

$$\sigma_x = -p\,,\quad \sigma_y = -p\,,\quad \sigma_z = -p\,.$$

Le componenti di taglio sono tutte e tre nulle: $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Utilizzando le equazioni costitutive combinate con i valori delle componenti delle tensioni appena calcolate, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) = -\frac{p}{E}(1-2\nu)\,;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right) = -\frac{p}{E}(1-2\nu)\,; \qquad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) = -\frac{p}{E}(1-2\nu)\,;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0\,;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0\,;$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0\,.$$

Integrando le prime tre equazioni di congruenza, ossia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

e combinandole con le (1) si ottengono le seguenti espressioni per le componenti dello spostamento:

$$u = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)x + u_r\,;$$

$$v = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)y + v_r\,;$$

$$w = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)z + w_r\,.$$

Le 3 costanti u_r, v_r e w_r indicano che la soluzione è definita a meno di uno spostamento rigido. Ponendole tutte e 3 uguali a $\emptyset$ si ottiene la seguente soluzione particolare:

$$u = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)x\,;$$

$$v = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)y\,;$$

$$w = -\frac{1}{E}p(1-2\nu)z\,.$$

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi