Prerequisiti: gradiente di un campo vettoriale

Esercizio sui prerequisiti: gradiente di un campo vettoriale

In un riferimento cartesiano $(O; x, y, z)$ con relativa base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \alpha x\mathbf{i} + \beta y\mathbf{j}, \tag{44}$$

dove α e β sono costanti. Si determinino le componenti di $\nabla\mathbf{u}$, il *gradiente* di $\mathbf{u}$, nonché le sue parti simmetrica e antisimmetrica, definite, rispettivamente, dalle formule:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}) \tag{42}$$

nelle quali $\mathbf{A}^T$ rappresenta la trasposta della matrice $\mathbf{A}$.

Prerequisiti: gradiente di un campo vettoriale

giovedì 12 dicembre 2019 09:00

Il gradiente di un vettore è una matrice i cui elementi sono le derivate parziali delle componenti del vettore considerato nella base ortonormale data.
Il generico elemento della matrice si può esprimere come $[\nabla \underline{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dove u_i è la i-esima componente del vettore $\underline{u}$ e x_j è la variabile relativa alla j-esima componente della base ortonormale. Nel caso specifico il gradiente è dato dalla seguente matrice:

$$\nabla \underline{u} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Utilizzando le formule (42) riportate, si ottengono le seguenti espressioni per la matrice simmetrica ed antisimmetrica la cui somma restituisce $\nabla \underline{u}$:

$$\underline{\underline{E}} = \nabla \underline{u} \quad ; \quad \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}} \quad ;$$

dove $\underline{\underline{0}}$ è la matrice di $\emptyset$, in questo caso, appartenente allo spazio $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi