Problema: Legame inverso (12 gennaio)

In un punto di un continuo di Cauchy, indicato con ε un parametro adimensionale, e indicata con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale, il tensore della deformazione ha il seguente aspetto

$$\underset{\sim}{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sotto l'ipotesi che il materiale sia elastico lineare e isotropo, determinare la matrice rappresentativa del tensore dello sforzo.

Problema legame inverso

sabato 4 gennaio 2020 12:34

Per un materiale lineare isotropo esiste diretta proporzionalità tra componenti normali di tensioni e dilatazioni e tra componenti tangenziali di tensioni e scorrimenti angolari, messi in luce dalle prove di trazione e compressione.

Si sceglie una base ortonormale i cui assi vengono indicati con x, y, z. È possibile così indicare le grandezze vettoriali anche attraverso le loro componenti nella base scelta.

Per praticità di rappresentazione, le componenti della tensione e della deformazione in un punto P possono essere raccolti nei due vettori tensione $\underline{\sigma}$ e deformazione $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad ;$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad .$$

Il legame costitutivo inverso tra i due può essere espresso, nel caso di materiale elastico lineare isotropo attraverso la seguente espressione, detta legge di Hooke generalizzata:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\, \underline{\varepsilon} \ . \quad (1)$$

La matrice $\underline{\underline{C}}$ è detta "matrice di rigidezza", di ordine 6x6, le cui componenti C_{ij} prendono il nome di costanti elastiche del materiale nel punto P ed hanno dimensioni fisiche pari a $[FL^{-2}]$.

Per un materiale isotropo il numero di costanti elastiche indipendenti è pari a 2 ed assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{C}} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} ,$$

dove ν è il coefficiente di Poisson e G è il modulo di elasticità tangenziale.

La forma generale del tensore della deformazione, come indicato nella (13.16) del libro Casini-Vasta, è la seguente:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad (2)$$

Viene fornito il tensore della deformazione per il materiale omogeneo considerato, rappresentato nella base considerata dalla

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon/2 & 0 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (3)$$

dove ε è un parametro adimensionale.

Confrontando la (2) con la (3) e tenendo conto della simmetria del tensore delle deformazioni, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x = \varepsilon \ , \ \gamma_{xy} = \varepsilon, \ \varepsilon_y = 0, \ \varepsilon_z = 0, \ \gamma_{xz} = 0, \ \gamma_{yz} = 0. \quad (4)$$

Scrivendo per componenti la (1) ed utilizzando le espressioni (4) appena ricavate, si ottiene:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\,\varepsilon \quad ;$$

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon \quad ;$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right] = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon \quad ;$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right] = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon \quad ; \qquad (5)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\varepsilon = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon \ ;$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0 \ ;$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 \ .$$

La matrice che rappresenta nella base scelta il tensore degli sforzi può essere scritta, secondo la definizione (14.7) del libro Casini - Vasta, come:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} .$$

Sostituendo nella precedente la (5), si ottiene l'espressione del tensore degli sforzi richiesta, ossia:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon & \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon & 0 \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon & \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon \end{bmatrix} .$$

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi