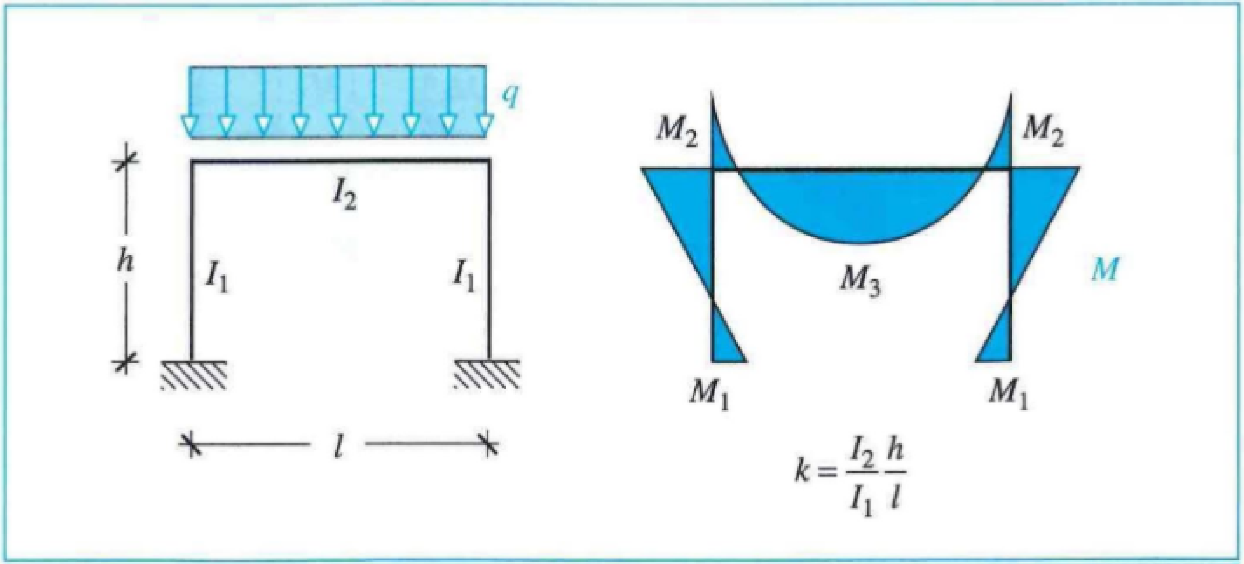
Calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture iperstatiche delle quali si conoscono le sollecitazioni

Si consideri il seguente schema ricorrente (Appendice B).



$$M_1 = \frac{ql^2}{12k + 24} \qquad M_2 = -\frac{ql^2}{6k + 12} \qquad M_3 = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{6k + 12}$$

Adoperando il PLV si determini l'abbassamento del punto situato al centro della trave disposta orizzontalmente.

Per semplicità si può assumere che i tre momenti d'inerzia siano uguali e che l'altezza h del portale sia uguale alla lunghezza $$\ell$, sicché k=1.

Nota: questo problema richiede un po' di inventiva nella scelta del sistema virtuale.

Se riuscite a risolve questo problema allora avete capito come funziona il PLV.

Calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture iperstatiche delle quali si conoscono le sollecitazioni

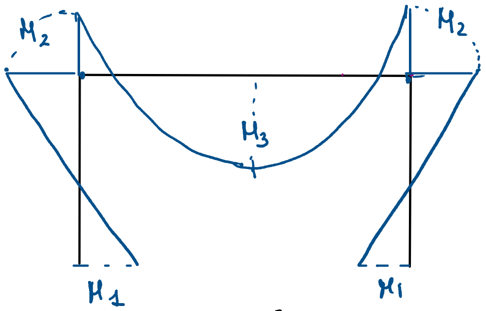
sabato 28 dicembre 2019 18:04

Il sistema da studiare è iperstatico ma da un precedente esercizio sono note le espressioni analitiche del momento flettente nel caso in cui la lunghezza del traverso, l, sia diversa da quella dei piedritti, h. Si assume anche in questo caso per tutti i tratti uguale rigidezza flessionale e momenti di inerzia. Ponendo $l = h$, le espressioni del momento flettente ed il corrispondente diagramma hanno la seguente forma:

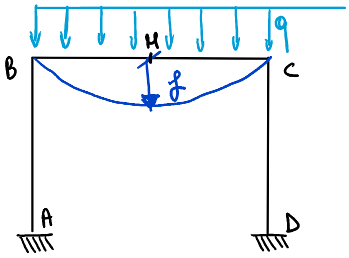
$$M_{AB} = \frac{ql^2}{12}\left(\frac{1}{3} - \frac{z}{l}\right);$$

$$M_{BC} = \frac{ql^2}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\frac{z}{l} - \frac{ql^2}{18} \; ; \qquad (1)$$

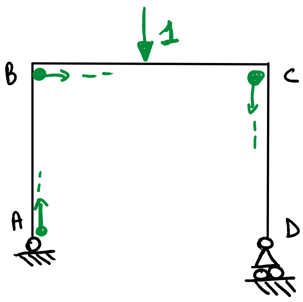
$$M_{CD} = \frac{ql^2}{12}\left[\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{z}{l}\right)\right].$$

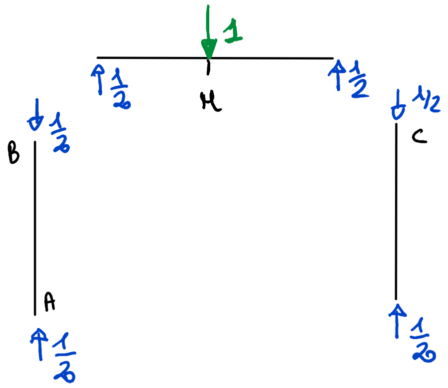


I momenti indicati sul diagramma hanno i seguenti valori: $M_1 = \frac{ql^2}{36}$, $M_2 = -\frac{ql^2}{18}$, $M_3 = \frac{5}{72}ql^2$.
Si richiede il calcolo dell'abbassamento indicato nella seguente figura come "f".



Si sceglie come sistema virtuale il seguente sistema, che ha il vantaggio di essere isostatico e di avere solo una forza che compie lavoro proprio sullo spostamento richiesto. Si assume che tutte le strutture siano inestensibili ed indeformabili al taglio. Si riporta anche il diagramma di struttura libera del sistema.

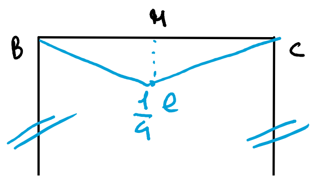




I sistemi di riferimento locali sono scelti, come da figura, in maniera identica a quanto fatto per la struttura iperstatica della traccia.
Si riportano le espressioni analitiche del momento flettente del sistema virtuale, caratterizzate dall'apice "v" ed il corrispondente diagramma:

$$M^v_{AB} = 0 \; ;$$

$$M^v_{BC} = \begin{cases} \frac{1}{2} z & \text{per } 0 < z \le l/2 \end{cases} \; ; \qquad (2)$$



$$M^v_{BC} = \begin{cases} \frac{1}{2} z & \text{per } 0 < z \leq l/2 \\ \frac{1}{2}(l - z) & \text{per } \frac{l}{2} < z < l \end{cases} \quad ; \qquad (2)$$

$$M^v_{CD} = 0 \, .$$

Si applica dunque il principio dei lavori virtuali, calcolando come da definizione il lavoro virtuale esterno ed interno.
L'unica forza del sistema virtuale che compie lavoro sul sistema reale è la forza unitaria agente nel punto x, a causa della presenza dei due vincoli di incastro.

$$L_{ve} = f \cdot 1 = f \qquad (3).$$

Utilizzando le espressioni (1) e (2), il lavoro virtuale interno viene scritto nel seguente modo, considerando le ipotesi precedentemente fatte sulla struttura:

$$L_{vi} = \int M^v \left(\frac{M^{eff}}{EI} \right) = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} z \left[\frac{ql^2}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\frac{z}{l} - \frac{ql^2}{18} \right] dz + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^{l} \frac{1}{2}(l - z) \left[\frac{ql^2}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\frac{z}{l} - \frac{ql^2}{18} \right] dz \, .$$

Calcolando il precedente integrale si ottiene:

$$L_{vi} = \frac{7}{1152} \frac{ql^4}{EI} \, . \qquad (4)$$

Per il principio dei lavori virtuali, uguagliando la (3) e la (4) si ottiene:

$$f = \frac{7}{1152} \frac{ql^4}{EI} \, .$$

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi