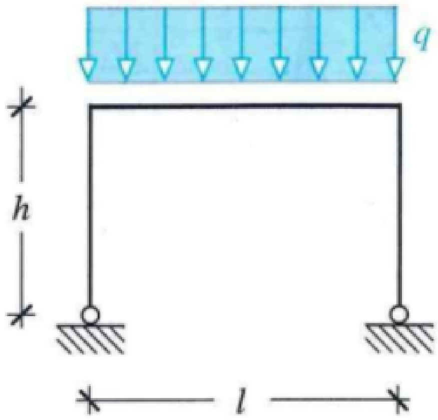
Esercitazione: Telaio incernierato e telaio incastrato

Svolgere questa esercitazione riportando solo i passaggi fondamentali (mantenersi entro tre pagine).

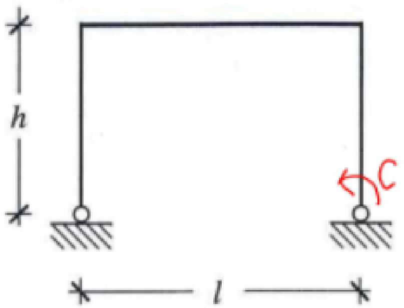
1) Adoperando il metodo delle forze, si risolva il telaio in figura.



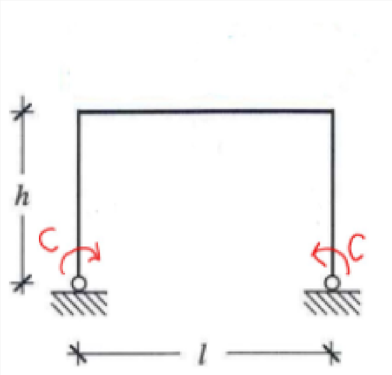
2) Adoperando il PLV si calcoli la rotazione in senso orario in corrispondenza della cerniera di destra

3) Adoperando il PLV si calcoli la rotazione in senso antiorario in corrispondenza delle cerniera di sinistra

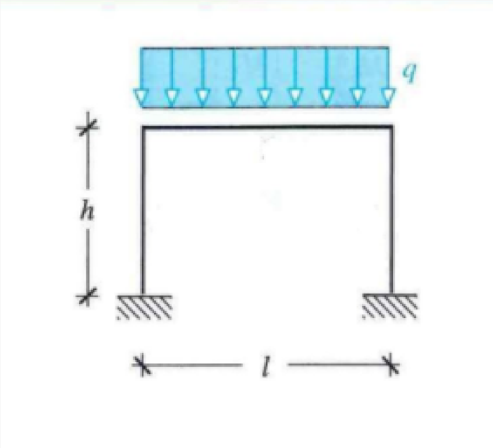
4) Con riferimento alla seguente struttura, si calcoli la rotazione in senso antiorario della sezione dove e` applicata la coppia e della sezione in corrispondenza dell'altra cerniera



5) Adoperando il risoltato del punto precedente, calcolare la rotazione in senso antiorario della cerniera di destra nella seguente struttura:



6) Sfruttando i risultati dei 5 punti precedenti, determinare il momento flettente del teleio incastrato alla base mostrato nella seguente figura:



Esercitazione: Telaio incernierato e telaio incastrato

martedì 17 dicembre 2019 15:17

① Il telaio rappresentato in figura (1) ha grado di iperstaticità pari a 1. Si ipotizza che la rigidezza flessionale EI sia costante ed uguale per tutti i tratti, che le travi siano inestensibili ed indeformabili a taglio. Per calcolare le caratteristiche della sollecitazione con il metodo delle forze, si sceglie il sistema isostatico equivalente di FIG (2) dove è stata trasformata la cerniera di destra in un carrello ed è stata introdotta l'incognita iperstatica X. L'equazione di congruenza che rende davvero equivalenti i due sistemi è $v(D)=0$, che ripristina il vincolo semplice rimosso.

FIG (1)

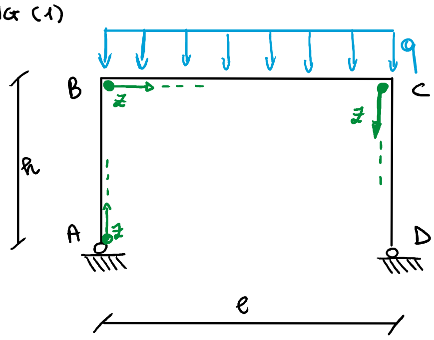
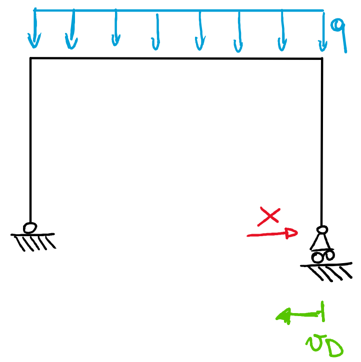


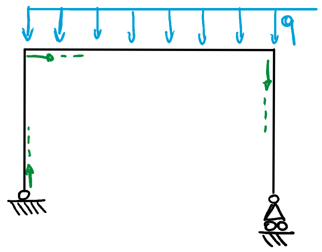
FIG (2)



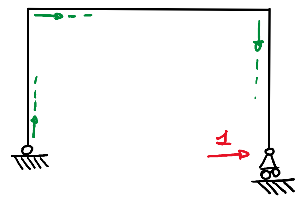
Si individua un riferimento locale per ogni trave come rappresentato in FIG (1) in verde. Per ogni tratto rettilineo si individua un'origine e, per continuità di rappresentazione, si sceglie che l'asse $\hat{z}$ di ogni trave sia sempre uscente dal foglio. In riferimento ai sistemi (0) ed (1) rappresentati in figura (3), l'equazione di congruenza può essere riscritta come $v_D = v_0(D) + X\, v_1(D)$. Utilizzando il PLV, si ottiene $v_0(D) = -\frac{1}{12}\frac{q\,l^3 h}{EI}$, $v_1(D) = -\frac{2h^3}{3EI} - \frac{h^2 l}{EI}$ e quindi $X = -\frac{q l^2}{8hK+12h}$, avendo introdotto $K = \frac{h}{l}$.

FIG (3)

Sistema (0)



Sistema (1)



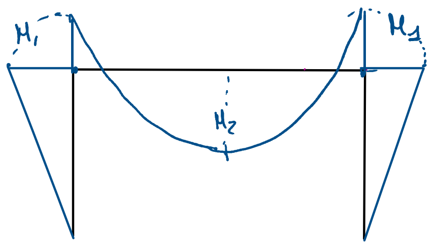
Il diagramma del momento flettente, ottenuto per sovrapposizione, è dato dalla FIG (a). Le espressioni analitiche sono le seguenti:

$$M_{AB} = \frac{-ql^2}{8K+12}\,\frac{z}{h};$$

$$M_{BC} = -\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}z - \frac{ql^2}{8K+12};$$

$$M_{CD} = -\frac{ql^2}{8K+12}\left(1-\frac{z}{h}\right).$$

Fig (a)

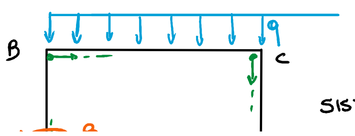


Si ha $M_1 = -\frac{ql^2}{8K+12}$, $M_2 = \frac{ql^2}{8}\left(\frac{2K+1}{2K+3}\right)$.

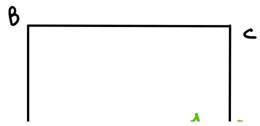
② Definisco la rotazione richiesta con α ed utilizzo come sistema virtuale il sistema riportato in FIG (5). È anche indicato il diagramma del momento flettente per il sistema virtuale.

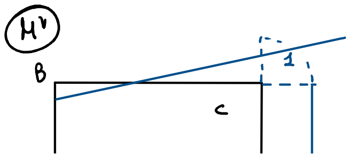
FIG (5)

SISTEMA REALE

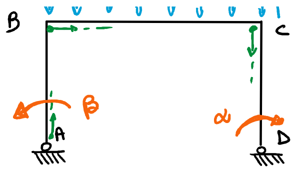


SISTEMA VIRTUALE

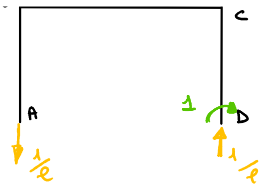


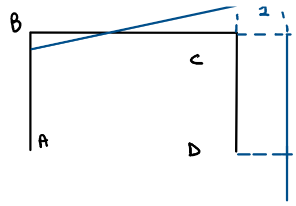


SISTEMA REALE



SISTEMA VIRTUALE





Si ottengono le seguenti espressioni per i lavori virtuali:

$$L_{ve} = \alpha \;;$$

$$L_{vi} = \int_0^{l} \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{z}{l}\right)\left(\frac{qz^2}{2} - \frac{ql}{2}z + \frac{ql^2}{8k+12}\right) dz + \int_0^{h} \frac{1}{EI}\,\frac{ql^2}{8hk+12h}\,(h-z)\, dz \;.$$

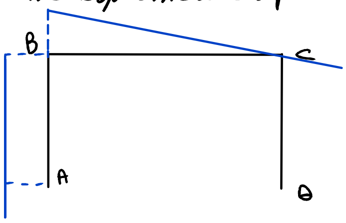
Risolvendo ed eguagliando si ha:

$$\alpha = -\frac{1}{24}\,\frac{ql^3}{EI} + \frac{ql^2(l+h)}{2EI\,(8k+12)} \;.$$

③ Questo punto si risolve considerando una situazione esattamente speculare rispetto a quella del punto precedente. La rotazione richiesta è indicata con β in figura 5. Data la simmetria della struttura, i calcoli da effettuare richiederebbero l'uso di un sistema virtuale speculare al precedente, il cui diagramma del momento flettente è quello di figura 6. Sempre grazie alla simmetria della struttura reale, il lavoro virtuale interno ha la stessa espressione di prima. Si ottiene dunque:

$$\beta = -\frac{1}{24}\,\frac{ql^3}{EI} + \frac{ql^2(l+h)}{2EI\,(8k+12)} \;.$$

FIG (6)



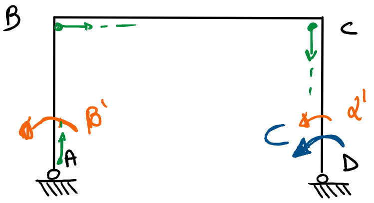
④ Si tratta di una struttura 1 volta iperstatica. Risolvendola con il metodo delle forze, analogamente al punto 1, si ottengono le seguenti espressioni per il momento flettente nei vari tratti:

$$M_{AB} = -\frac{3C}{2h}\,\frac{1+k}{3+2k}\,z \;;$$

$$M_{BC} = \frac{C}{l}z - \frac{3}{2}\,C\,\frac{1+k}{3+2k} \;;$$

$$M_{CD} = C - \frac{3}{2}\,C\,\frac{1+k}{3+2k}\left(1-\frac{z}{h}\right).$$

FIG (7)



In figura (7) le rotazioni richieste sono indicate con α' e β'. Per il calcolo della rotazione α' si utilizza il sistema virtuale riportato al punto 2, ottenendo:

$$L_{ve} = -\alpha'$$

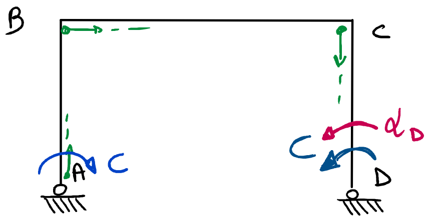
$$L_{vi} = \int_0^{l}\frac{1}{EI}\left(\frac{C}{l}z - \frac{3}{2}C\,\frac{1+k}{3+2k}\right)\left(-\frac{z}{l}\right)dz + \int_0^{h}\frac{1}{EI}\left[C - \frac{3}{2}C\,\frac{1+k}{3+2k}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right](-1)\,dz$$

da cui si ottiene $\alpha' = \frac{Cl}{EI}\left(\frac{1}{3}+k\right) - \frac{3}{4}\,\frac{Cl}{EI}\,\frac{(1+k)^2}{3+2k}$.

Analogamente, per il calcolo di β' si utilizza il sistema virtuale del punto 3, ottenendo:

$$\beta' = \frac{3}{4}\,\frac{Cl}{EI}\,\frac{(1+k)^2}{3+2k} - \frac{Cl}{6EI} \,.$$

⑤ Si indica la rotazione richiesta con α_D, come indicato nella FIG (8).

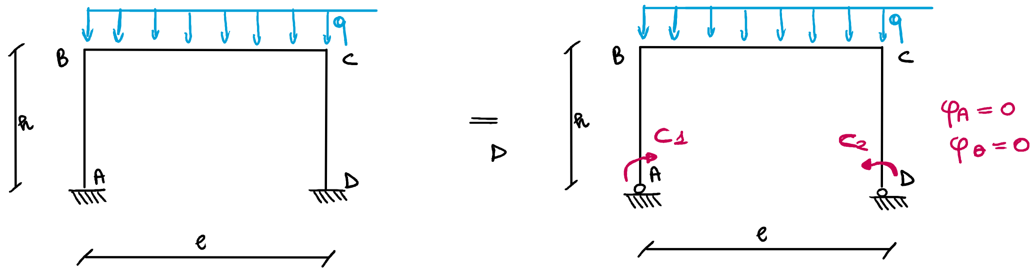


Per il principio di sovrapposizione si può scrivere $\alpha_D = \alpha' - \beta''$, indicando con β'' la rotazione oraria in D provocata da una coppia oraria applicata in A. Il valore β'' è ricavabile con considerazioni di simmetria dal punto 4 ed è uguale a β'.

Si ha dunque $\alpha_D = \frac{Cl}{EI}\left(\frac{1}{3}+k\right) - \frac{3}{2}\frac{Cl}{EI}\frac{(1+k)^2}{3+2k}$.

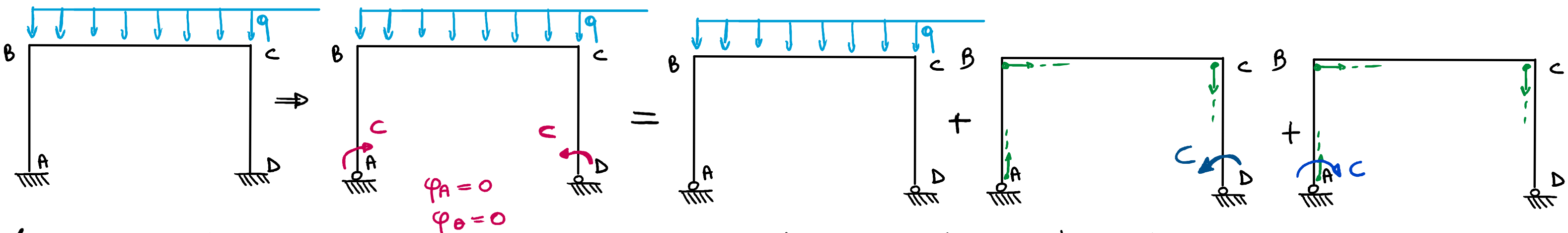
⑥ Il telaio incastrato può essere visto come equivalente ad un telaio incernierato a cui sono state applicate due coppie in A e in D tali da rendere nulle le rotazioni in quei due punti, come da FIG 8.

FIG. (8)



Per simmetria si ha che i valori delle due coppie sono uguali, ossia $C_1 = C_2 = C$. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene che $\varphi_D = \alpha_D - \alpha = 0$. Il segno meno di fronte ad α è dovuto al fatto che α è stato misurato in senso orario. Nella precedente equazione l'unica incognita è il momento C. Risolvendo si ottiene: $C = \frac{ql^2}{12(k+2)}$.

Per calcolare l'espressione del momento flettente, si fa ricorso nuovamente al principio di sovrapposizione degli effetti sfruttando i momenti calcolati ai punti precedenti.
Graficamente, si ha:



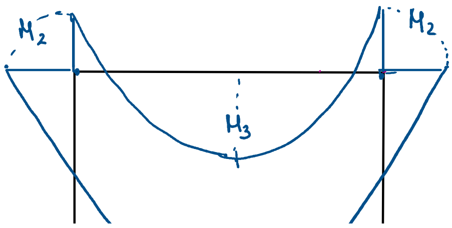
Le espressioni dell'ultimo dei precedenti schemi non sono state calcolate analiticamente ma sono facilmente ricavabili per simmetria da quelle del punto 4. Le espressioni analitiche del momento flettente della figura data sono:

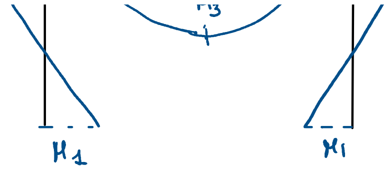
$$M_{AB} = \frac{ql^2}{6(k+2)}\left(\frac{1}{3} - \frac{z}{h}\right);$$

$$M_{BC} = \frac{ql^2}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\frac{z}{l} - \frac{ql^2}{6(k+2)};$$

$$M_{CD} = \frac{ql^2}{6(k+2)}\left[\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{z}{h}\right)\right].$$

Il diagramma del momento è dunque il seguente.





I moduli dei tre momenti indicati sono : $M_1 = \frac{q\ell^2}{12(k+2)}$; $M_2 = \frac{q\ell^2}{6(k+2)}$; $M_3 = \frac{q\ell^2}{8} - \frac{q\ell^2}{6(k+2)}$.

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi