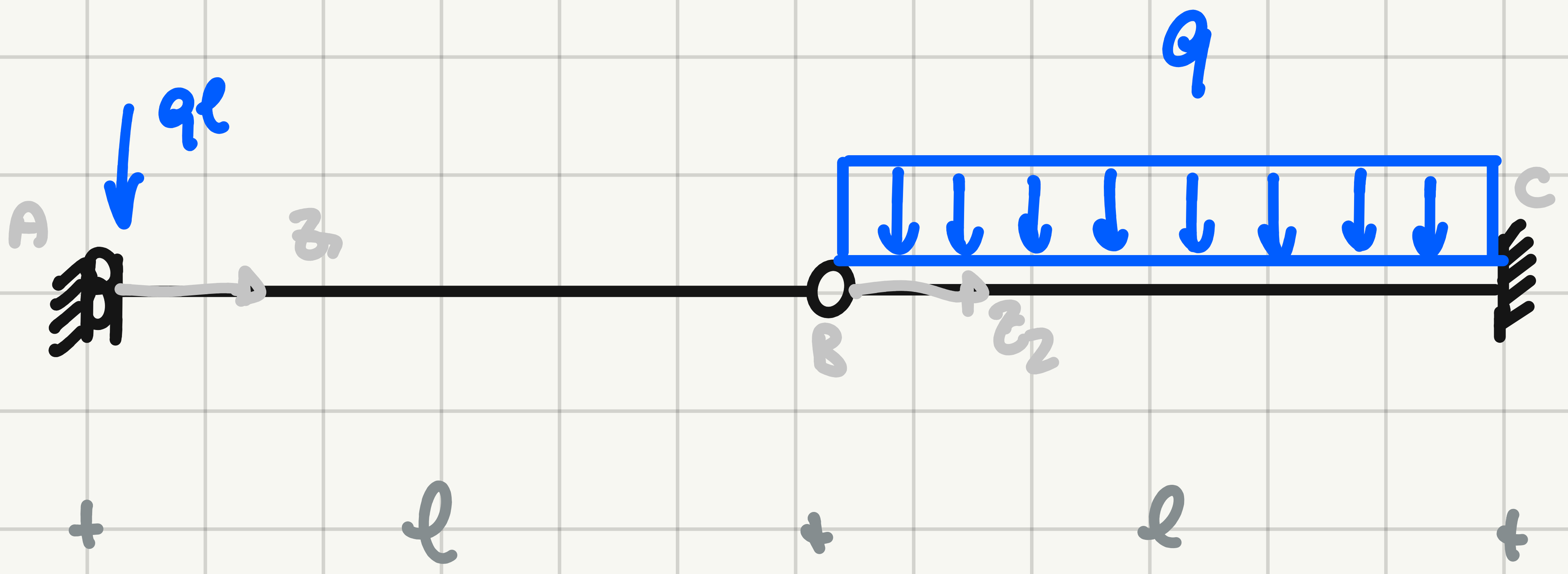
ESERCITAZIONE 4

METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Hp

- $\gamma \to 0 \quad GA_t \to +\infty$ modello di Eulero-Bernoulli
- $EI = \begin{cases} EI & z_1 \in [0,\ell] \\ 2EI & z_2 \in [0,\ell] \end{cases}$

In prima battuta andiamo a fare un'analisi preliminare; abbiamo una struttura composta da due travi, se vista come un sistema di corpi rigidi, il numero dei gradi di libertà complessivi è pari a $3n_c = 6$.
Computando il valore della molteplicità dei vincoli possiamo richiamare la formula

$$n - m = l - i$$

dal quale, in assenza di cinematismi ci restituisce

$$i = 1.$$

Lo struttura dunque ha grado di iperstaticità pari a 1. Dunque non è possibile calcolare direttamente il valore delle reazioni vincolari.
Per lo studio della risposta strutturale offerta da questa struttura, ci appelliamo al metodo degli spostamenti. Attraverso tale metodo, privilegeremo le incognite cinematiche che una volta note ci permettono di calcolare le misure della deformazione e le caratteristiche della sollecitazione.
Il problema in questione è puramente flessionale, richiamiamo dunque le equazioni che lo governano

$$\begin{cases} \cancel{\gamma(z)}^{\,0} = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \\ T'(z) + q = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0. \\ \cancel{\gamma(z)}^{\,0} = \cancel{\dfrac{T(z)}{GA_t}} \\ \chi(z) = \dfrac{M(z)}{EI} \end{cases}$$

Dalla prima equazione di congruenza otteniamo:

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

che combinata con la seconda ci restituisce

$$\chi(z) = -v''(z)$$

Tale equazione la andremo a combinare con l'equazione costitutiva

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

che ci restituirà:

$$M(z) = -EI\,v''(z)$$

Richiamando la nostra attenzione sulle equazioni differenziali indefinite di equilibrio.

$$\begin{cases} T'(z) + q = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

derivando la seconda otteniamo:

$$M''(z) - T'(z) = 0$$

dove:

$$\begin{cases} T'(z) = -q \\ M(z) = -EI\,v''(z) \end{cases}$$

in definitiva otteniamo l'equazione della linea elastica, nella sua forma generale.

$$\left[-EI\,v''(z)\right]'' + q = 0$$

$$-EI\,v^{IV}(z) + q = 0 \qquad (1)$$

Specializzando l' eq. (1) per la nostra struttura, ricordando che:

$$EI(z) = \begin{cases} EI & z_1 \in [0, \ell] \\ 2EI & z_2 \in [0, \ell] \end{cases}$$

otteniamo

$$-EI\,v^{IV}(z_1) = 0 \qquad \text{per} \quad z_1 \in [0, \ell] \qquad (1.1)$$

$$-EI\,v^{IV}(z_2) + q = 0 \qquad \text{per} \quad z_2 \in [0, \ell] \qquad (1.2)$$

Procediamo con l' integrazione delle equazioni della linea elastica, per quanto riguarda la (1.1)

$$v_1^{IV}(z_1) = 0$$

$$v_1'''(z_1) = c_1$$

$$v_1''(z_1) = c_1 z + c_2$$

$$v_1'(z_1) = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$

$$v_1(z) = \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \qquad (2.1)$$

Mentre per quanto riguarda l' eq. (1.2)

$$-2EI\,v_2^{IV}(z_2) + q = 0$$

$$v_2^{IV}(z_2) = \frac{q}{2EI}$$

$$v_2^{III}(z_2) = \frac{q}{2EI} z + c_5$$

$$v_2^{II}(z_2) = \frac{1}{4}\frac{q}{EI} z^2 + c_5 z + c_6$$

$$v_2'(z_2) = \frac{1}{12}\frac{q}{EI} z^3 + \frac{1}{2} c_5 z^2 + c_6 z + c_7$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{48}\frac{q}{EI} z^4 + \frac{1}{6} c_5 z^3 + \frac{1}{2} c_6 z^2 + c_7 z + c_8 \qquad (2.2)$$

Adesso per calcolare le 8 costanti d'integrazione, affiancheremo alle relative condizioni al contorno sui vincoli esterni e le condizioni di raccordo del vincolo interno.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno per i vincoli esterni, alle eq. (2.1) e (2.2) verranno affiancate rispettivamente.

$$\begin{cases} v_1'(0) = 0 \\ v_1'''(0) = \dfrac{ql}{EI} \end{cases}$$

$\varphi_1(0) = 0$

$\underbrace{-EI\, v'''(B)}_{T(B)} = -ql$

mentre all'equazione (2.2) affiancheremo le seguenti condizioni al contorno offerte dai vincoli esterni.

$$\begin{cases} v_2(l) = 0 \\ v_2'(l) = 0. \end{cases}$$

$\varphi_2(l) = 0$

Al quale andremo a inserire anche le condizioni di raccordo della cerniera interna.

$$\begin{cases} v_1(l) = v_2(0) \\ v_1'''(l) = v_2'''(0) \\ v_1''(l) = 0 \\ v_2''(0) = 0 \end{cases}$$

spostamento relativo

trasmissione del taglio.

momento flettente nullo in corrispondenza del vincolo di cerniera interna.

Imponendo le condizioni al contorno alle eq. (2.1) e (2.2)

$$v_1'(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$v_1'''(0) = \frac{ql}{EI} \longrightarrow \frac{ql}{EI} = C_1$$

$$v_2(l) = 0 \longrightarrow \frac{1}{48}\frac{q}{EI} l^4 + \frac{1}{6} C_5 l^3 + \frac{1}{2} C_6 l^2 + C_7 l + C_8 = 0$$

$$v_2'(l) = 0 \qquad \frac{1}{12}\frac{q}{EI} l^3 + \frac{1}{2} C_5 l^2 + C_6 l + C_7 = 0.$$

infine imponiamo le condizioni di raccordo e otteniamo:

$$v_1(l) = v_2(0) \qquad \frac{1}{6}c_1 l^3 + \frac{1}{2}c_2 l^2 + c_3 l + c_4 = c_8$$

$$v_1'''(l) = v_2'''(0) \qquad c_1 = c_5$$

$$v_1''(l) = 0 \qquad c_2 = 0$$

$$v_2''(0) = 0 \qquad c_6 = 0$$

Combinando tutti i risultati ottenuti, otteniamo che:

$$c_1 = c_5 = \frac{ql}{EI}$$
$$c_2 = 0$$
$$c_3 = 0$$

$$\frac{1}{48}\frac{q}{EI}l^4 + \frac{1}{6}c_5 l^3 + \cancel{\frac{1}{2}c_6 l^2} + c_7 l + c_8 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{1}{12}\frac{q}{EI}l^3 + \frac{1}{2}c_5 l^2 + \cancel{c_6 l} + c_7 = 0 \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{6}c_1 l^3 + \cancel{\frac{1}{2}c_2 l^2} + \cancel{c_3 l} + c_4 = c_8 \qquad (3.3)$$

$$c_6 = 0$$

Dall'equazione (3.1) combiniamo il valore di $c_5 = \frac{ql}{EI}$ e otteniamo

$$\frac{1}{48}\frac{ql}{EI}l^4 + \frac{1}{6}\frac{ql^4}{EI} + c_7 l + c_8 = 0. \qquad (*)$$

analogo per la (3.2)

$$\frac{1}{12}\frac{ql^3}{EI} + \frac{1}{2}\frac{ql^3}{EI} + c_7 = 0$$

Dalla quale calcoliamo il valore di c_7

$$c_7 = -\frac{7}{12}\frac{ql^3}{EI}$$

che combinato con (*) ci permette di calcolare il valore di c_8

in particolare:

$$\frac{1}{48}\frac{ql^4}{EI}+\frac{1}{6}\frac{ql^4}{EI}+c_7 l+c_8=0.$$

dove

$$c_7=-\frac{7}{12}\frac{ql^3}{EI}$$

$$c_8=\frac{19}{48}\frac{ql^4}{EI}$$

e infine andando a combinare questi risultati con l'equazione (3.3) otteniamo il valore dell'ultima costante d'integrazione:

$$c_4=\frac{35}{48}\frac{ql^4}{EI}.$$

In definitiva l'andamento dello spostamento é dettato dalle seguenti espressioni analitiche:

$$v(z)=\begin{cases} v_1(z_1)=\dfrac{1}{6}\dfrac{ql}{EI}z^3-\dfrac{1}{2}\dfrac{ql^2}{EI}z^2+\dfrac{35}{48}\dfrac{ql^4}{EI} & z_1\in[0,l] \\ v_2(z_2)=\dfrac{1}{48}\dfrac{q}{EI}z^4+\dfrac{1}{6}\dfrac{ql}{EI}z^3-\dfrac{7}{12}\dfrac{ql^4}{EI}z+\dfrac{19}{48}\dfrac{ql^4}{EI} & z_2\in[0,l] \end{cases}$$