ESERCITAZIONE 5

INTEGRAZIONE DELLA LINEA ELASTICA PER UNA TRAVE SU DUE APPOGGI SOGGETTA AD UNA COPPIA APPLICATA AD UN ESTREMO.


Il nostro obiettivo è di andare a caratterizzare la risposta strutturale di questa struttura adoperando il metodo degli spostamenti.
Per prima cosa possiamo subito osservare che si tratta di una struttura **STATICAMENTE DETERMINATA**, se vista come un corpo rigido, il numero dei gradi di libertà eguaglia il valore della molteplicità dei vincoli.
Si tratta inoltre di un problema puramente flessionale, pertanto ricordando le equazioni di governo sotto l'ipotesi di trave di Bernoulli:

$$\begin{cases} \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \\ T'(z) + q = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \\ \chi(z) = \dfrac{M(z)}{EI} \end{cases}$$

Nello spirito del metodo degli spostamenti, andiamo a privilegiare le incognite cinematiche. Ottenendo l'equazione della linea elastica

$$-EI\, v^{IV}(z) + q = 0$$

che nel nostro caso si semplifica:

$$v^{IV}(z) = 0$$

integrando otteniamo:

$$v^{III}(z) = c_1$$
$$v^{II}(z) = c_1 z + c_2$$
$$v'(z) = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$
$$v(z) = \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

che andremo a risolvere con delle opportune condizioni al contorno, in particolare noto che sono presenti 4 costanti d'integrazione avremo bisogno di 4 condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v''(0) = -\frac{m}{EI} \\ v''(l) = 0. \end{cases}$$

dunque avremo:

$$\begin{cases} v(z) = \frac{1}{6}c_1 z^3 + \frac{1}{2}c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \\ v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v''(0) = -\frac{m}{EI} \\ v''(l) = 0. \end{cases}$$

$$v(0) = 0 \longrightarrow c_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \longrightarrow \frac{1}{6}c_1 l^3 + \frac{1}{2}c_2 l^2 + c_3 l + \cancel{c_4} = 0$$

$$v''(0) = -\frac{m}{EI} \qquad c_2 = -\frac{m}{EI}$$

$$v''(l) = 0 \qquad c_1 l + c_2 = 0.$$

Dal quale emerge che i valori di $c_1$ e $c_3$ valgono rispettivamente:

$$c_1 = \frac{m}{lEI}$$
$$c_3 = \frac{1}{3}\frac{m}{EI}l.$$

Quindi otteniamo:

$$v(z) = \frac{1}{6}\frac{m}{lEI}z^3 - \frac{1}{2}\frac{m}{EI}z^2 + \frac{1}{3}\frac{ml}{EI}z$$

A questo punto calcoliamo le rotazioni in corrispondenza delle sezioni di vincoli, ricordando che:

$$\varphi(z) = -v'(z).$$

pertanto otteniamo:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\frac{m}{\ell EI}z^2 + \frac{m}{EI}z - \frac{1}{3}\frac{m\ell}{EI}$$

e dunque otteniamo per $\varphi_A(0) = -\frac{1}{3}\frac{m\ell}{EI}$ in senso orario mentre per $\varphi_B(\ell) = \frac{1}{6}\frac{m\ell}{EI}$ in senso antiorario

Per quanto riguarda infine il momento flettente, ricordiamo l'eq. costitutiva che lega la curvatura flessionale con il momento flettente:

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

esso lo possiamo riscrivere come:

$$M(z) = -EI\, v''(z).$$

$$M(z) = -\frac{m}{\ell}z + m$$

e il diagramma è riportato in fig.