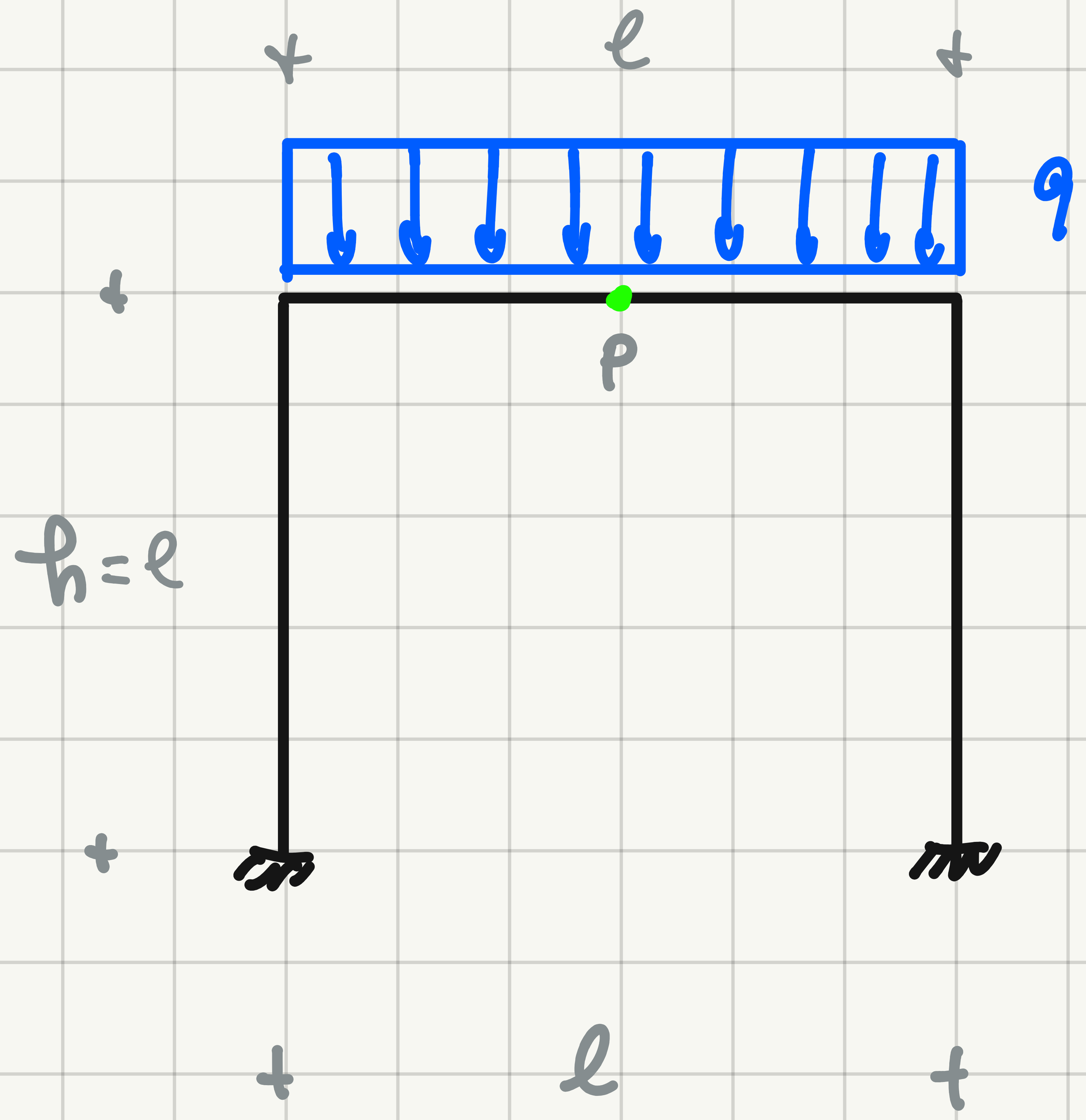
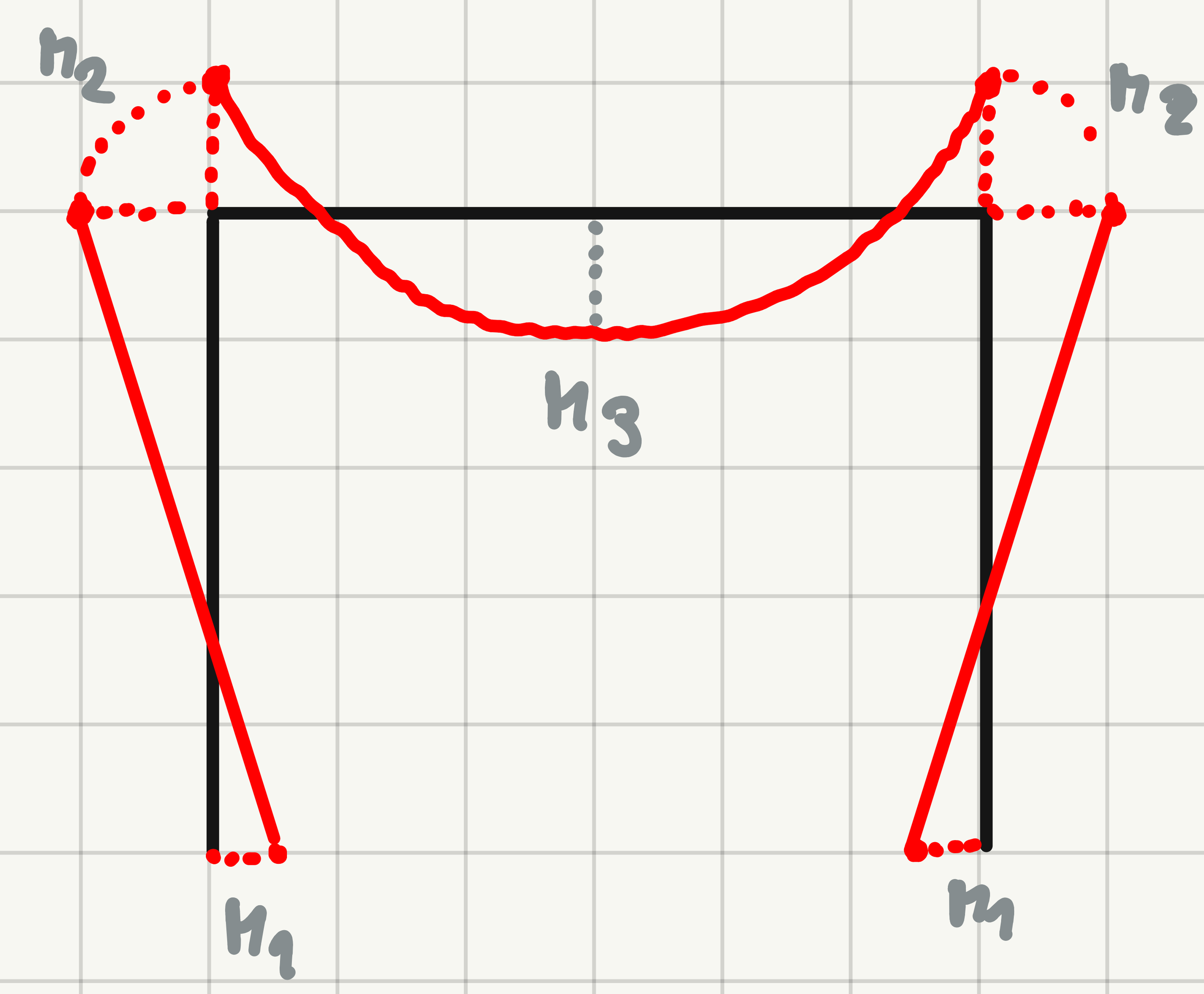
ESERCITAZIONE 6

CALCOLO DI SPOSTAMENTI E ROTAZIONI IN STRUTTURE IPERSTATICHE DELLE QUALI SI CONOSCONO LE SOLLECITAZIONI

Abbiamo noto:





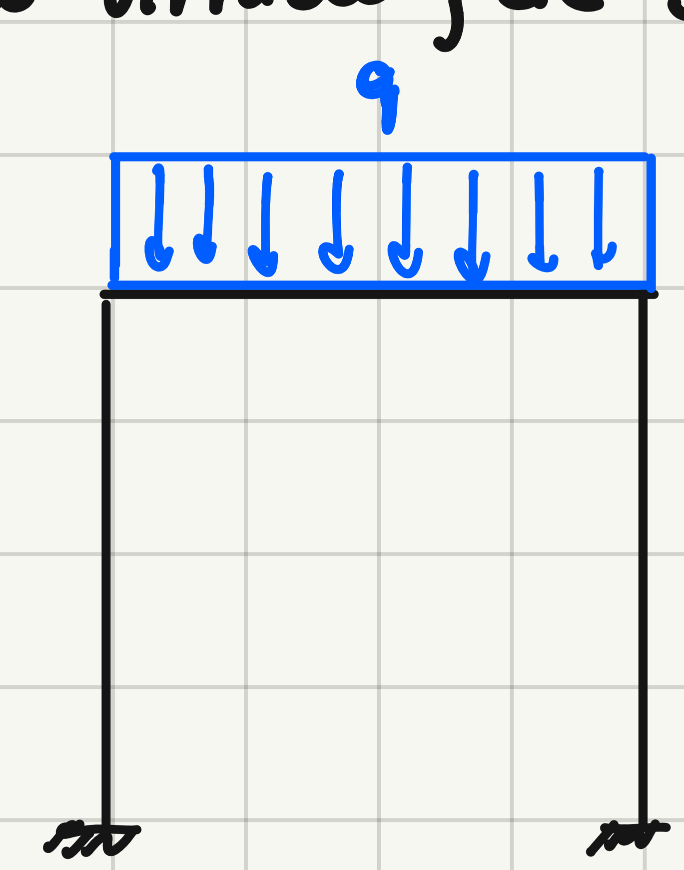
dove abbiamo anche noti i valori di

$$M_1 = \frac{1}{36} ql^2 \qquad M_2 = -\frac{1}{18} ql^2 \qquad M_3 = \frac{5}{72} ql^2.$$

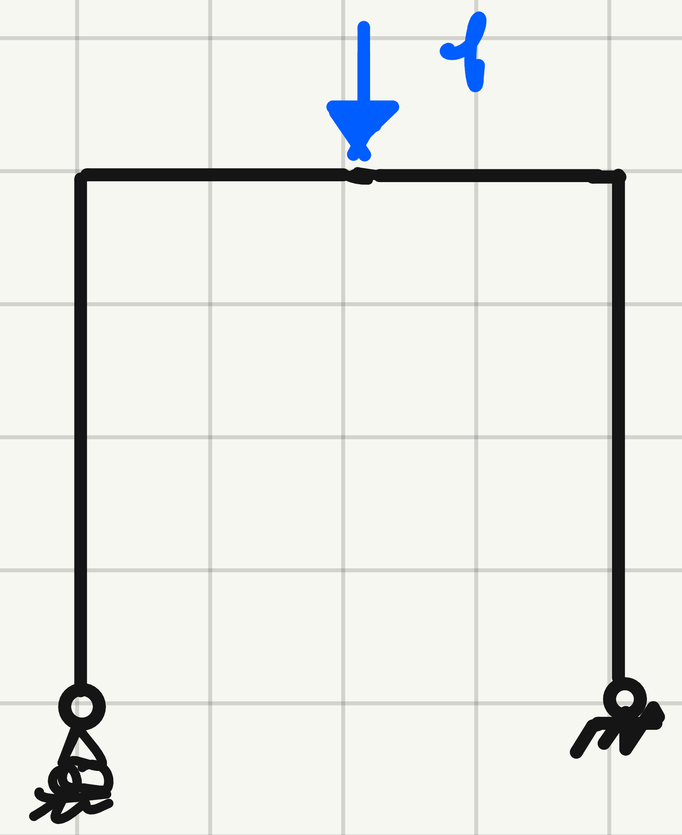
Il nostro obiettivo è andare a calcolare lo spostamento del punto P
Per prima cosa facciamo delle ipotesi puramente semplificative:

1. $\gamma \to 0 \quad GA_t \to +\infty$
2. $EA \to +\infty$

considerando così una trave di Eulero-Bernoulli e meccanicamente inestensibile.
Dai dati a noi noti possiamo dedurre che il punto P è soggetto ad uno spostamento verticale. Per affrontare lo studio di tale problema dovremo adoperare il teorema dei lavori virtuali.
In particolare definiamo il sistema effettivo, che sarà il nostro sistema congruente e un sistema virtuale, che sarà il nostro sistema equilibrato

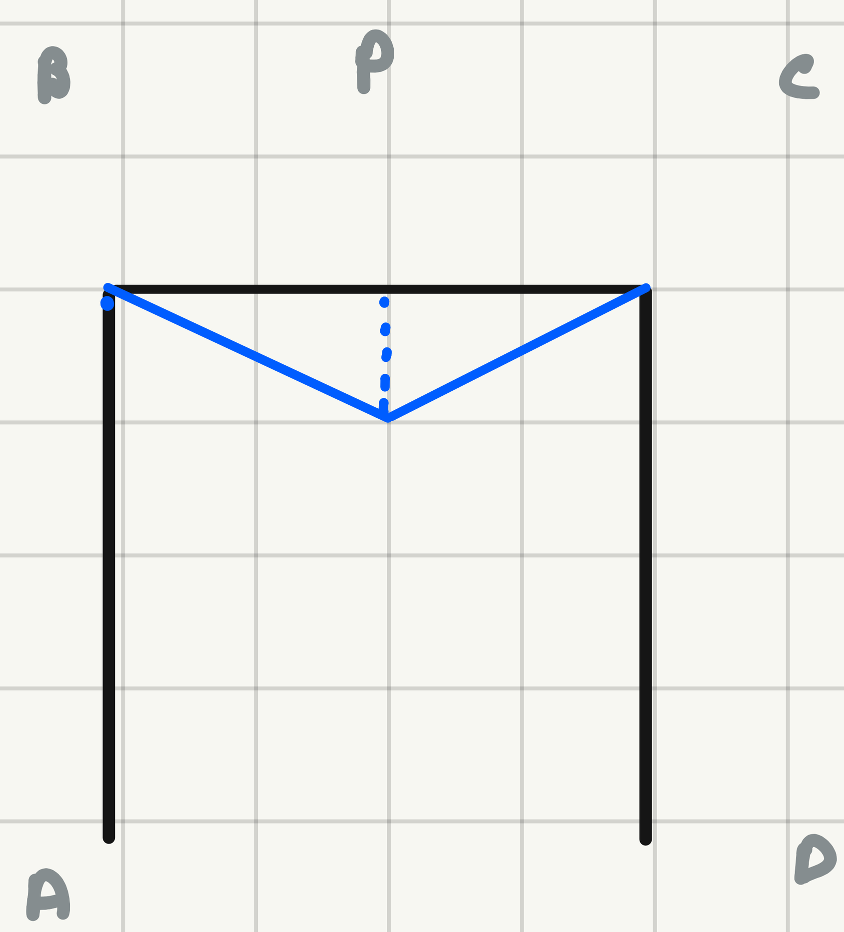


sistema effettivo.



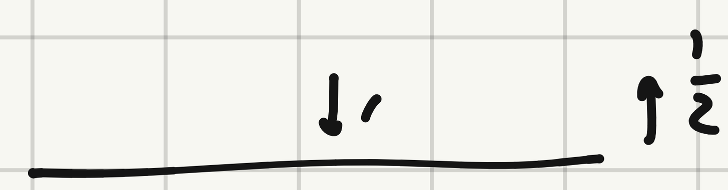
SISTEMA VIRTUALE.

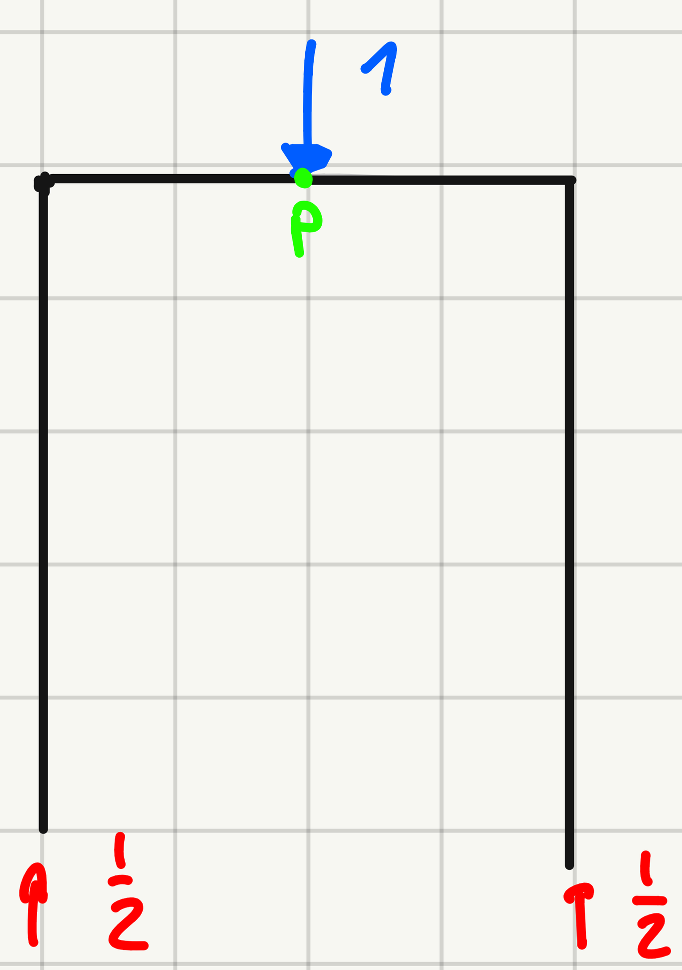
Dal sistema virtuale cerchiamo di caratterizzarlo, andando a cercare i diagrammi delle CdS.



dove gli andamenti del momento flettente sono delle funzioni lineari che possiamo ricavare andando ad adoperare le equazioni differenziali indefinite di equilibrio.

Dal diagramma di struttura libera emerge che:





procediamo con il caratterizzare le espressioni analitiche del momento flettente, andando ad integrare le equazioni differenziali indefinite di

	AB	BP	PC	CD
M	0	$\frac{z}{2}$	$-\frac{1}{2}z + \frac{\ell}{2}$	0

di equilibrio.
A questo ci spostiamo allo studio del sistema effettivo cercando di risolvere all' espressione del momento flettente.

$$M^{eff}(z) = c_1 z^2 + c_2 z + c_3.$$

che assume la forma di una parabola; noto che.

$$M(0) = -\frac{1}{18} q\ell^2$$
$$M(\ell) = -\frac{1}{18} q\ell^2.$$
$$M(\ell/2) = \frac{5}{72} q\ell^2$$

imponiamo le condizioni al contorno e otteniamo:

$$M(0) = -\frac{1}{18} q\ell^2 \longrightarrow c_3 = -\frac{1}{18} q\ell^2.$$

$$M(\ell) = -\frac{1}{18} q\ell^2 \longrightarrow c_1 \ell^2 + c_2 \ell - \cancel{\frac{1}{18} q\ell^2} = -\cancel{\frac{1}{18} q\ell^2}$$
$$c_1 \ell^2 + c_2 \ell = 0$$

$$M(\ell/2) = \frac{5}{72} q\ell^2 \qquad c_1 \frac{\ell^2}{4} + c_2 \frac{\ell}{2} - \frac{1}{18} q\ell^2 = \frac{5}{72} q\ell^2.$$
$$\frac{1}{4} c_1 \ell^2 + \frac{1}{2} c_2 \ell = \frac{1}{8} q\ell^2.$$

mettendo a sistema le ultime due equazioni otteniamo i valori di c_1 e c_2.

$$\begin{cases} \ell^2 c_1 + \ell c_2 = 0 \\ \frac{1}{4} \ell^2 c_1 + \frac{1}{2} \ell c_2 = \frac{1}{8} q\ell^2 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \ell^2 & \ell \\ \frac{1}{4}\ell^2 & \frac{1}{2}\ell \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ell^3 - \frac{1}{4}\ell^3 = \frac{1}{4}\ell^3.$$

$$c_1 = \frac{4}{\ell^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ \frac{1}{8} q\ell^2 & \frac{1}{2}\ell \end{pmatrix} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\ell^3} \cdot -\frac{1}{\cancel{8}_2} q\cancel{\ell^3} = -\frac{q}{2}.$$

$$c_2 = \frac{4}{\ell^3} \det \begin{pmatrix} \ell^2 & 0 \\ \frac{1}{4}\ell^2 & \frac{1}{8} q\ell^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q\ell.$$

in definitiva otteniamo;

$$M(z)^{eff} = -\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}z - \frac{1}{18}ql^2. \qquad \text{per il tratto BC.}$$

analogamente per quanto riguarda il momento flettente nei tratti verticali:

	AB	BC	CD
$M(z)^{eff}$	$-\frac{1}{12}qlz + \frac{1}{36}ql^2$	$-\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}z - \frac{1}{18}ql^2$	$\frac{1}{12}qlz - \frac{1}{18}ql^2$

Dunque adoperando il teorema dei lavori virtuali:

$$\mathcal{L}_v^e = v_p^{eff} \cdot 1.$$

$$\mathcal{L}_v^i = \int_{strutt} M_v \chi^{eff}.$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{z}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}qz^2 + \frac{1}{2}qlz - \frac{1}{18}ql^2\right)dz + \frac{1}{EI}\int_{l/2}^{l}\left(-\frac{1}{2}z + \frac{l}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}qz^2 + \frac{1}{2}qlz - \frac{1}{18}ql^2\right)dz.$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(-\frac{1}{4}qz^3 + \frac{1}{4}qlz^2 - \frac{1}{36}ql^2z\right)dz + \frac{1}{EI}\int_{l/2}^{l}\left(\frac{1}{4}qz^3 - \frac{1}{4}qlz^2 + \frac{1}{36}ql^2z - \frac{1}{4}qlz^2 + \frac{1}{4}ql^2z - \frac{1}{36}ql^3\right)dz$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{256}ql^4 + \frac{1}{96}ql^4 - \frac{1}{288}ql^4\right] + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{16}qz^4 - \frac{1}{12}qlz^3 + \frac{1}{72}ql^2z^2 - \frac{1}{12}qlz^3 + \frac{1}{8}ql^2z^2 - \frac{1}{36}ql^3z\right]_{l/2}^{l}$$

$$= \frac{7}{2304}\frac{ql^4}{EI} + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{16}ql^4 - \frac{1}{12}ql^4 + \frac{1}{72}ql^2 - \frac{1}{12}ql^4 + \frac{1}{8}ql^4 - \frac{1}{36}ql^4 - \frac{1}{256}ql^4 + \frac{1}{96}ql^4\right.$$

$$\left. - \frac{1}{288}ql^4 + \frac{1}{96}ql^4 - \frac{1}{32}ql^4 + \frac{1}{72}ql^4\right]$$

$$= \frac{7}{2304}\frac{ql^4}{EI} + \frac{7}{2304}\frac{ql^4}{EI} = \frac{7}{1152}\frac{ql^4}{EI}$$

in definitiva:
$$v_p^{eff} = \frac{7}{1152}\frac{ql^4}{EI}$$