ESERCITAZIONE 8

CIRCONFERENZA DI MOHR

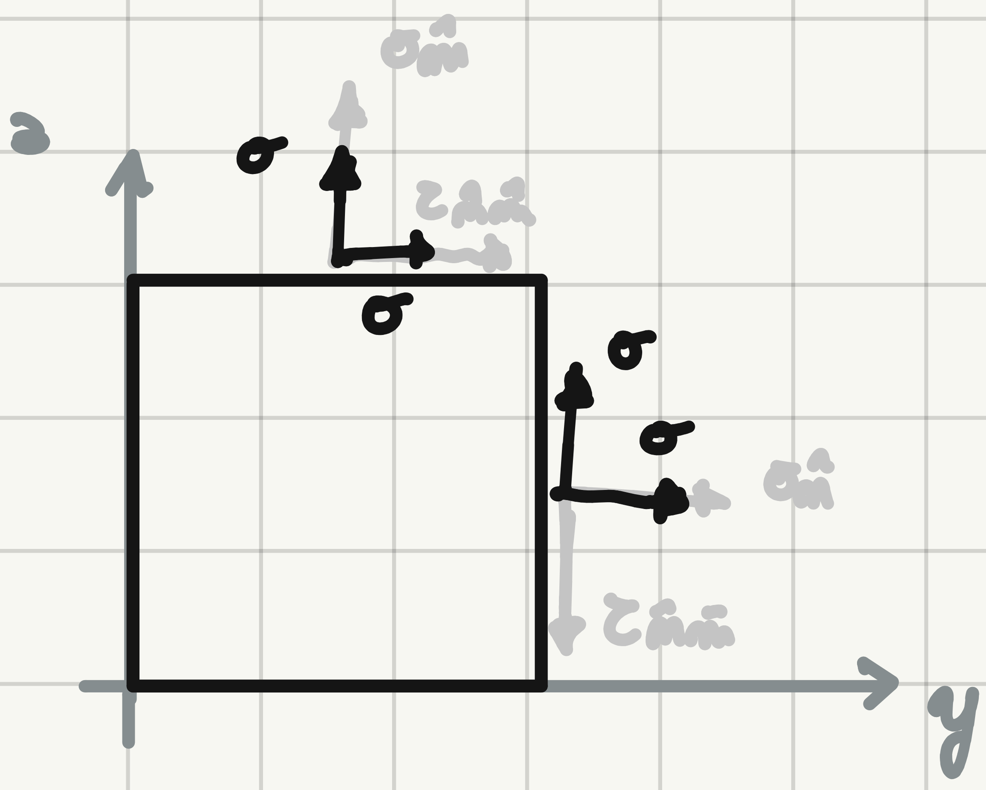
Noto lo stato tensionale descritto dal tensore dello sforzo:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

il nostro obiettivo è andare a determinare le tensioni e direzioni principali attraverso la costruzione di Mohr.

Possiamo osservare che tale tensore ha $\det(\underline{T}) = 0 = I_3$; tale condizione è necessaria e sufficiente per dichiarare che si tratta di uno stato tensionale piano, ove il vettore delle tensioni è contenuto nel piano $\hat{y}z$.

Consideriamo un cubetto infinitesimo elementare:



Consideriamo due generici angoli:

$$\vartheta = 0 \quad e \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

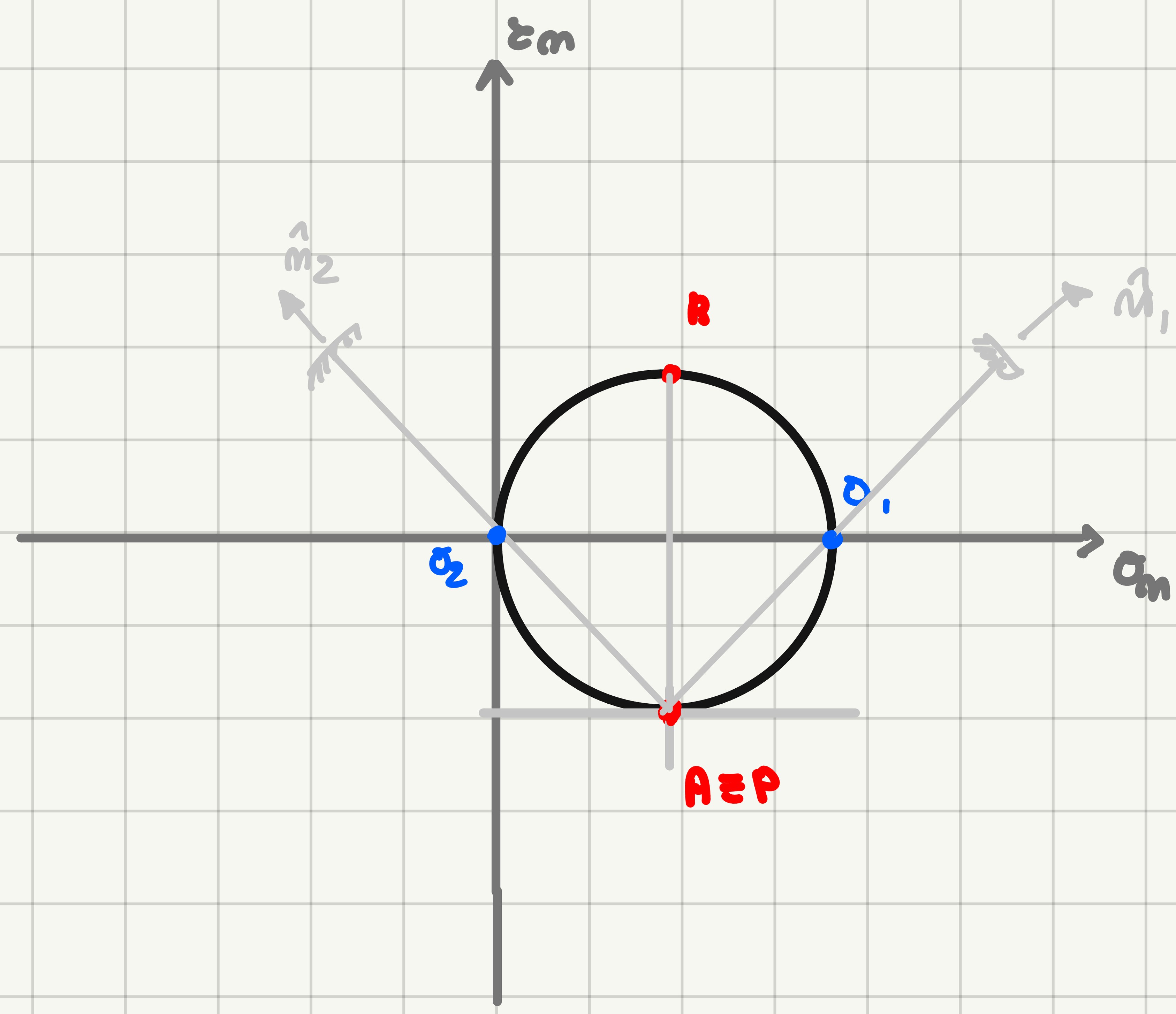
per $\vartheta = 0$ individuiamo il seguente stato tensionale.

$$\vartheta = 0 \quad A : \begin{cases} \sigma_{\hat{n}} = \sigma \\ \tau_{\hat{m}\hat{n}} = -\sigma \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad B : \begin{cases} \sigma_{\hat{n}} = \sigma \\ \tau_{\hat{m}\hat{n}} = \sigma. \end{cases}$$

Considero a questo punto il piano di Mohr e traccio la circonferenza di Mohr procedendo come segue:

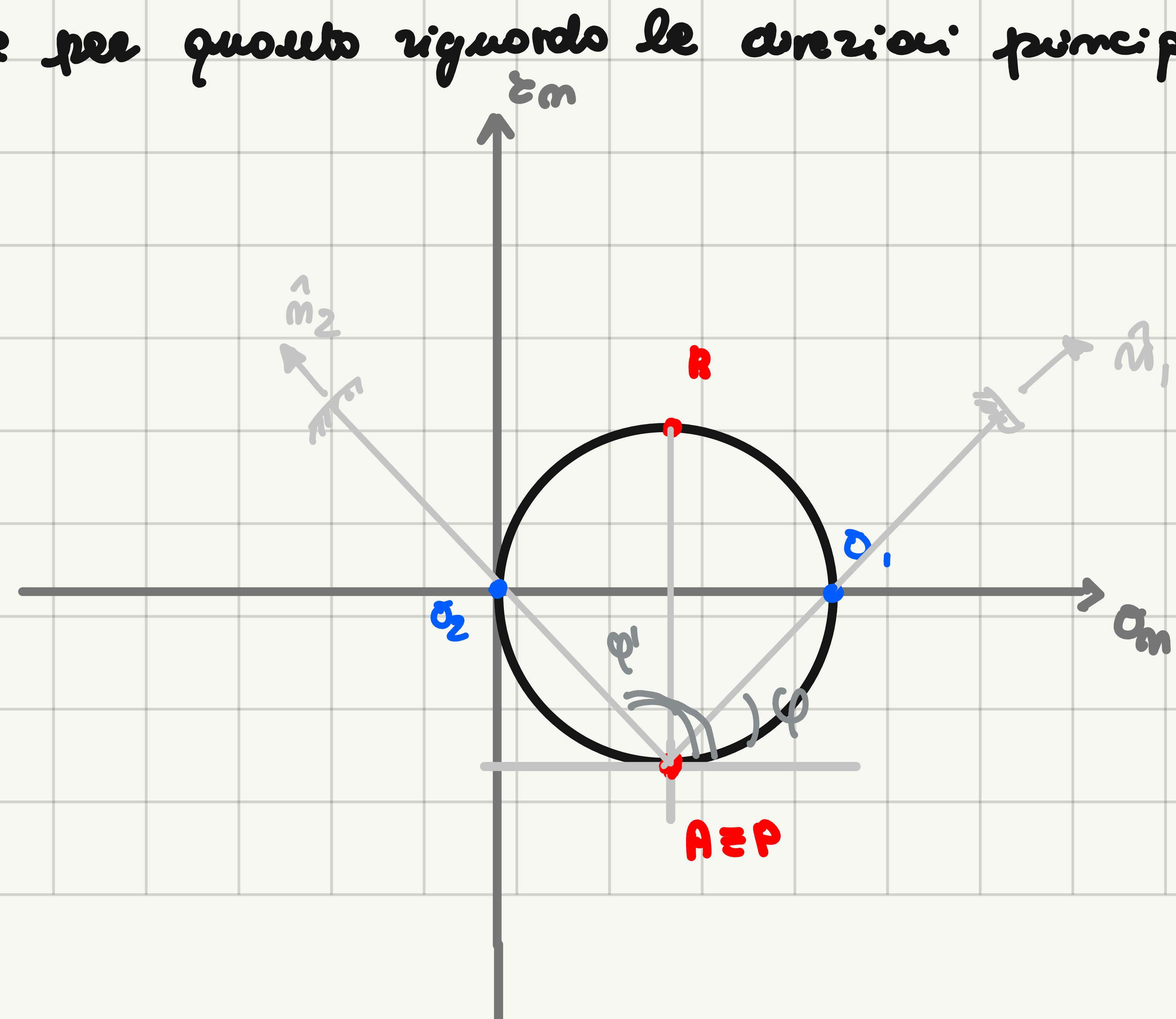
1. Rappresento A e B sul piano di Mohr.
2. Traccio la retta passante per A, B, essendo diametralmente opposti, posso semplicemente
3. Traccio le rette normali e individuo il polo di rappresentazione di Mohr
4. Tracciamo la circonferenza di Mohr, passante per i tre punti



Individuando così come tensioni principali:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2\sigma \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

mentre per quanto riguarda le direzioni principali otteniamo:



Dalla rappresentazione grafica possiamo andare a introdurre gli angoli φ e φ' che andremo a valutare come segue:

Ricordiamo che il versore normale associato alla prima direzione principale

$$[\hat{m}_1] = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\hat{m}_1] = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix}.$$

ricordando inoltre la condizione di ortonormalità:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

imponiamo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \cancel{\alpha_1^2} + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \tan(\varphi) = \dfrac{\beta_1}{\gamma_1} = \dfrac{\cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}} = 1 \end{cases}$$

dalla terza equazione osserviamo che:

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = 1 \Rightarrow \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

pertanto $\beta_1 = \gamma_1$ combinato alla seconda otteniamo

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 1/\sqrt{2} \\ \gamma_1 = 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Per quanto riguarda invece φ'. esso può essere visto come:

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

il cui valore della tangente, corrispondente al rapporto tra

$$\frac{\beta_2}{\gamma_2} = \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}} = -1$$

pertanto otteniamo:

$$\beta_2 = -\gamma_2$$

dunque imponendo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \dfrac{\beta_2}{\gamma_2} = -1 \end{cases}$$

Dal quale emerge che:

$$\left[\hat{m}_2\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

infine per quanto riguarda $\hat{m}_2$ esso é ortogonale al piano nel quale sono contenuti $\hat{m}_1$ e $\hat{m}_3$.
Pertanto otteniamo:

$$\left\{\hat{m}_3\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pertanto otteniamo le seguenti direzioni principali:

$$\begin{cases} \hat{m}_1 = 1/\sqrt{2}\,\hat{\jmath} + 1/\sqrt{2}\,\hat{k} \\ \hat{m}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{k} \\ \hat{m}_3 = \hat{\imath} \end{cases}$$