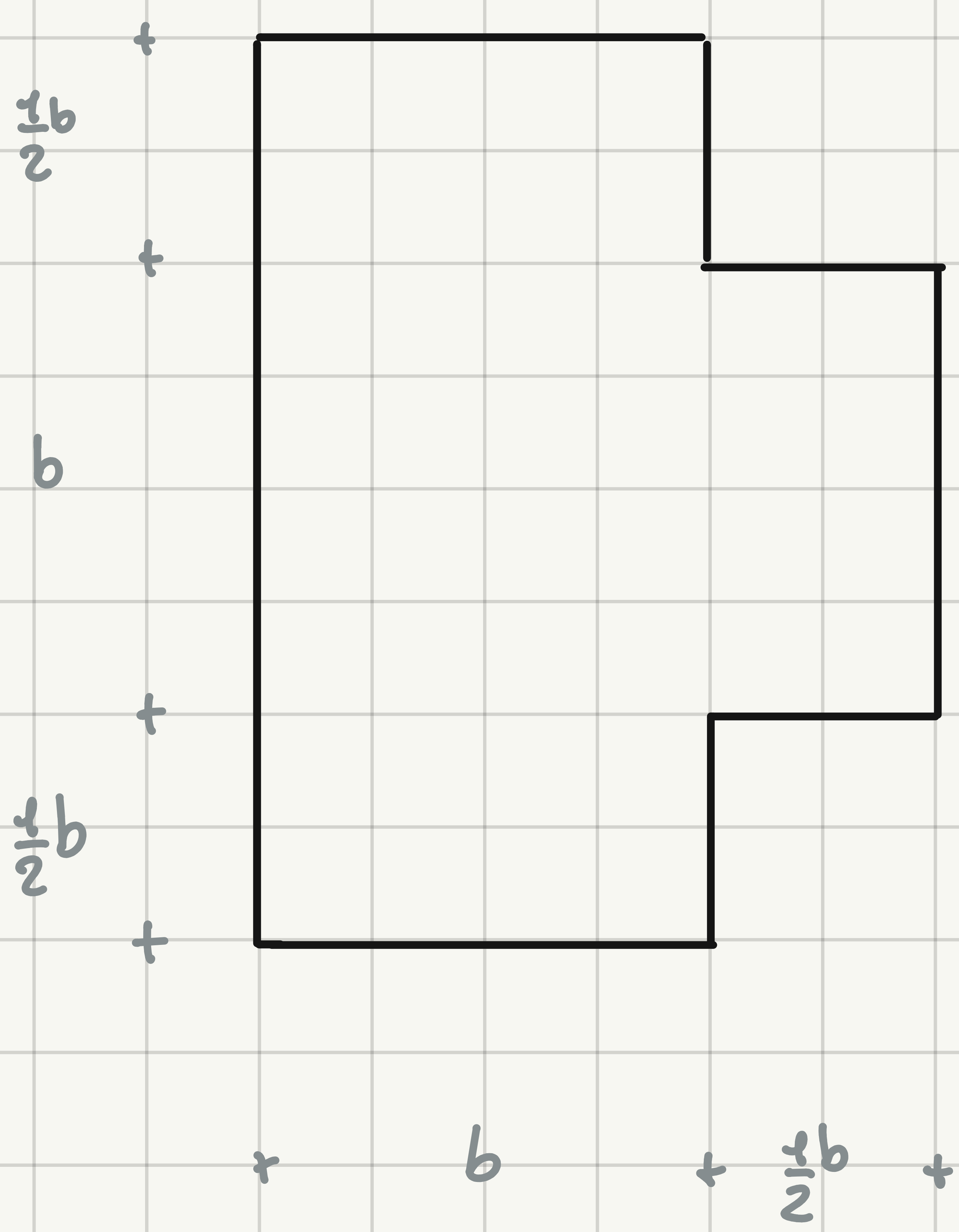
ESERCITAZIONE 9

Geometria delle aree.

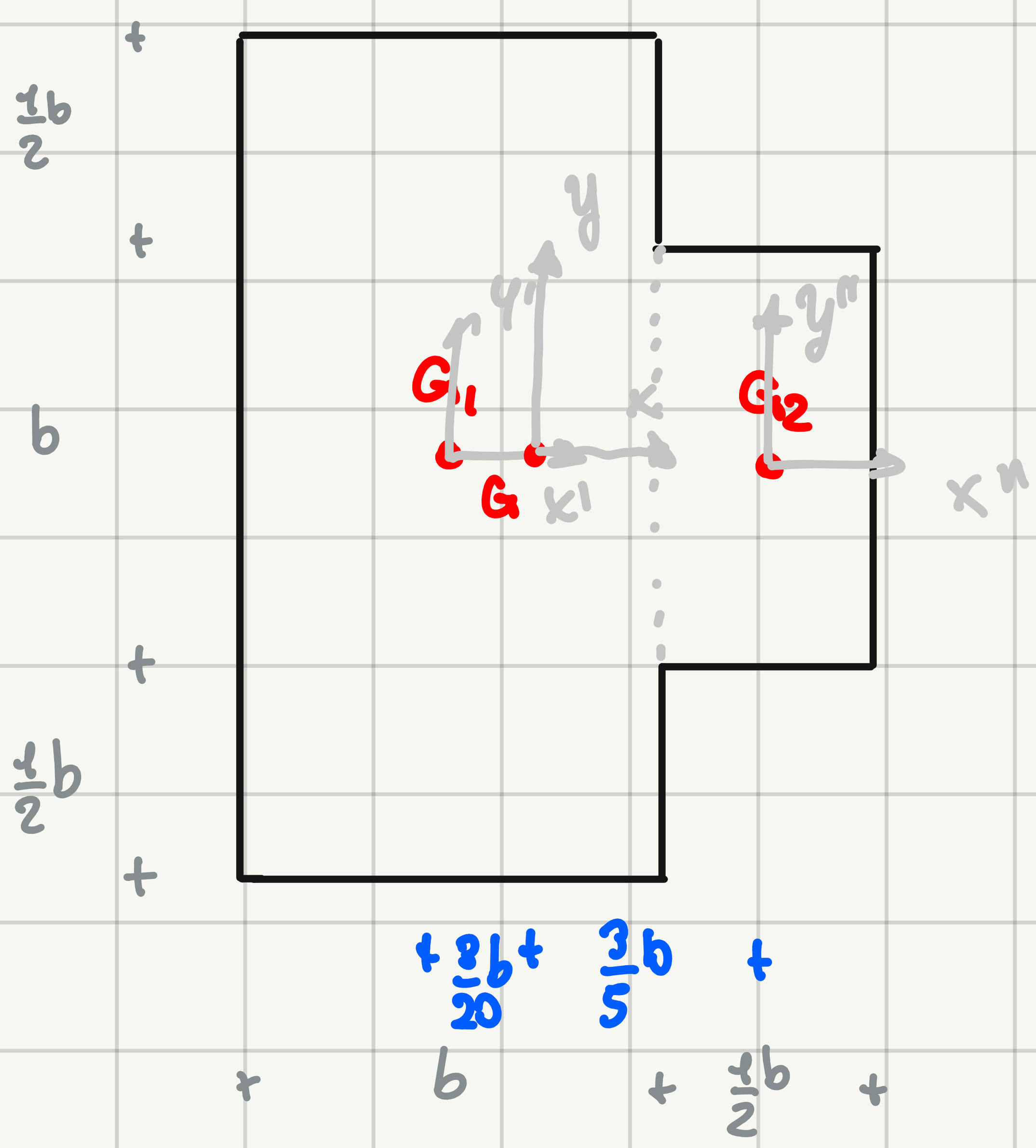
SEZIONE 1



Dobbiamo calcolare:

- $I_x = ?$
- $I_y = ?$
- Posizione del baricentro

Per prima cosa possiamo notare che la sezione in questione presenta un'asse di simmetria. Dividiamo la sezione in due sottosezioni di cui ne possiamo facilmente individuare area e posizione dei rispettivi baricentri.



[Fig 1.]

Introduciamo due rispettivi sistemi principali e osserviamo che la posizione del baricentro si troverà lungo l'asse di simmetria.

$$A = A_1 + A_2 = 2b^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{5}{2}b^2$$

Adesso procediamo con il calcolo della posizione del baricentro della sezione scegliendo come polo il punto G_1

$$S_{x'} = S_{x'}^{(1)} + S_{x'}^{(2)} = \cancel{y_{G_1}'} A_1 + y_{G_2}' A_2.$$

$$\Rightarrow \quad y_{G}' \cancel{A} = y_{G_2}' \frac{A_2}{A}$$

$$y_{G}' = \left(\frac{3}{4}b\right)\frac{\frac{1}{2}b^2}{\frac{5}{2}b^2} = \frac{3}{20}b$$

che andiamo a rappresentare in fig. 1.; nel quale quotiamo anche le distanze rispetto ad alcuni punti notevoli, (ad esempio le distanze tra gli assi centrali).

Dunque ci troviamo a cavallo di un sistema di riferimento centrale d' inerzia, nel quale il tensore delle tensioni ha come forma variante una matrice 3 × 3 con gli elementi solamente lungo la sua diagonale.
Procediamo con il calcolo dei momenti centrali d' inerzia:

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G.$$

dove

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} + \cancelto{0}{d_{x_1}^2 A_1}$$
$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} + \cancelto{0}{d_{x_2}^2 A_2}.$$

pertanto otteniamo:

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{2}{3} b^4$$
$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{24} b^4.$$

in conclusione:

$$I_x^G = I_{x_1}^{G_1} + I_{x_2}^{G_2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{24}\right) b^4 = \frac{17}{24} b^4$$

In maniera del tutto analoga procediamo con il calcolo dell' altro momento centrale d' inerzia:

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G$$

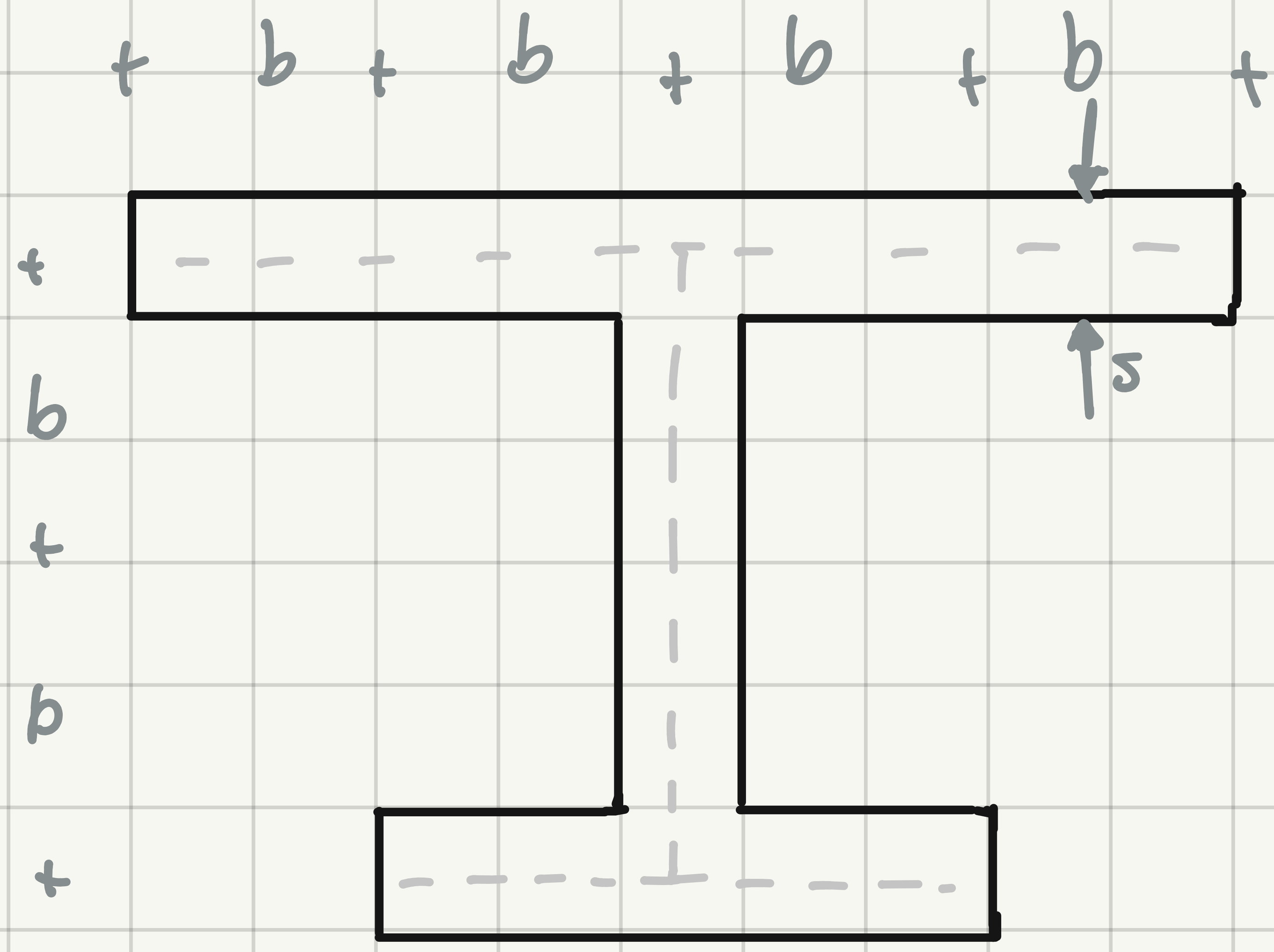
dove:

$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + d_{y_1}^2 A_1 = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{3}{20} b\right)^2 (2b^2) = \frac{127}{600} b^4$$
$$I_{y_2}^G = I_{y_2}^{G_2} + d_{y_2}^2 A_2 = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{3}{5} b\right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2\right) = \frac{457}{2400} b^4$$

in conclusione avremo:

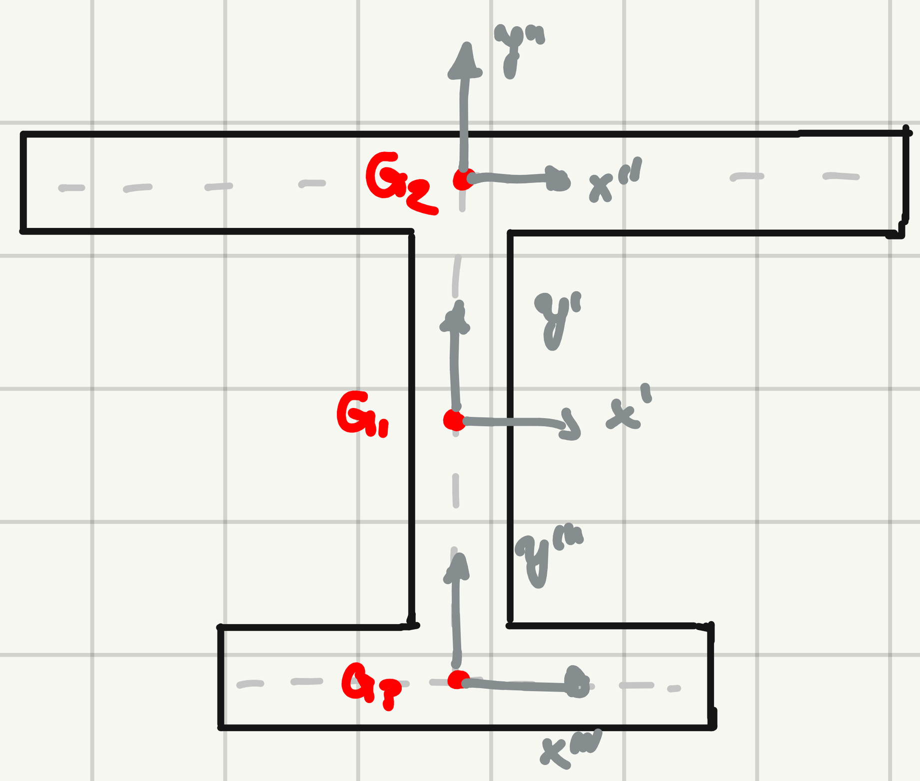
$$I_{y_1}^G + I_{y_2}^G = I_y^G = \frac{193}{480} b^4 \simeq 0.4 b^4.$$

SEZIONE 2



Procediamo nella stessa maniera del caso precedente, in particolar modo, indichiamo in fig. 2 le posizioni dei baricentri delle sottosezioni, le aree e la posizione del baricentro della sezione.

Osserviamo subito che è presente un' asse di simmetria, pertanto il baricentro sarà necessariamente su quell' asse sarà necessariamente su quell' asse.



[fig. 2]

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4bs + 2bs + 2bs = 8bs.$$

successivamente procediamo con il calcolo della posizione del baricentro; in particolare ci mettiamo a cavallo del sistema $G_1\,x'\,y'$

Pertanto:

$$S_{x'} = S_{x'}^{(1)} + S_{x'}^{(2)} + S_{x'}^{(3)}$$

$$y_{G'}\,A = \cancel{y_{G_1}'\,A_1} + y_{G_2}'\,A_2 + y_{G_3}'\,A_3$$

ottenendo così:

$$y_{G'} = \frac{y_{G_2}'\,A_2 + y_{G_3}'\,A_3}{A} = \frac{4b^2s - 2b^2s}{8bs} = \frac{1}{4}b.$$

graficando, possiamo visualizzare in fig. 3

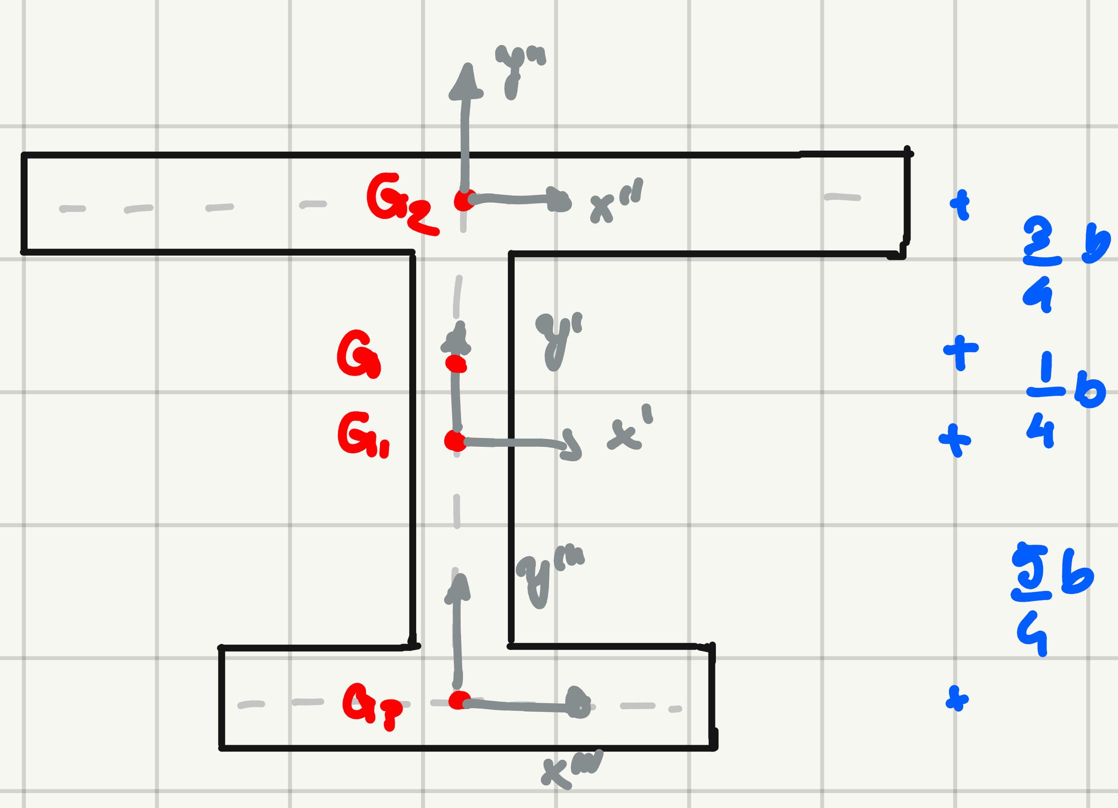


fig. 3.

E procediamo con il calcolo dei momenti centrali d'inerzia.

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G + I_{x_3}^G$$

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G$$

dove

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} + d_{x_1}^2 A_1 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{1}{16} b^2\right) 2bs = \frac{19}{24} b^3 s.$$

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} + d_{x_2}^2 A_2 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{9}{16} b^2\right)(4bs) \simeq \frac{9}{4} b^3 s$$

$$I_{x_3}^G = I_{x_3}^{G_3} + d_{x_3}^2 A_3 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{25}{16} b^2\right)(2bs) \simeq \frac{25}{8} b^3 s$$

Sommando otteniamo:

$$I_x^G = \frac{37}{6} b^3 s.$$

Per quanto riguarda poi l'altro momento centrale d'inerzia, avremo:

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G$$

dove:

$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + \cancelto{0}{d_{y_1}^2 A_1}$$

$$I_{y_1}^G = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{1}{12} s^3 b \simeq 0 \quad \text{trascurabile.}$$

$$I_{y_2}^G = I_{y_2}^{G_2} = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{64}{12} b^3 s = \frac{16}{3} b^3 s$$

$$I_{y_3}^G = I_{y_3}^{G_3} = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{8}{12} b^3 s = \frac{2}{3} b^3 s.$$

Sommando otteniamo:

$$I_y^G = 6 b^3 s.$$