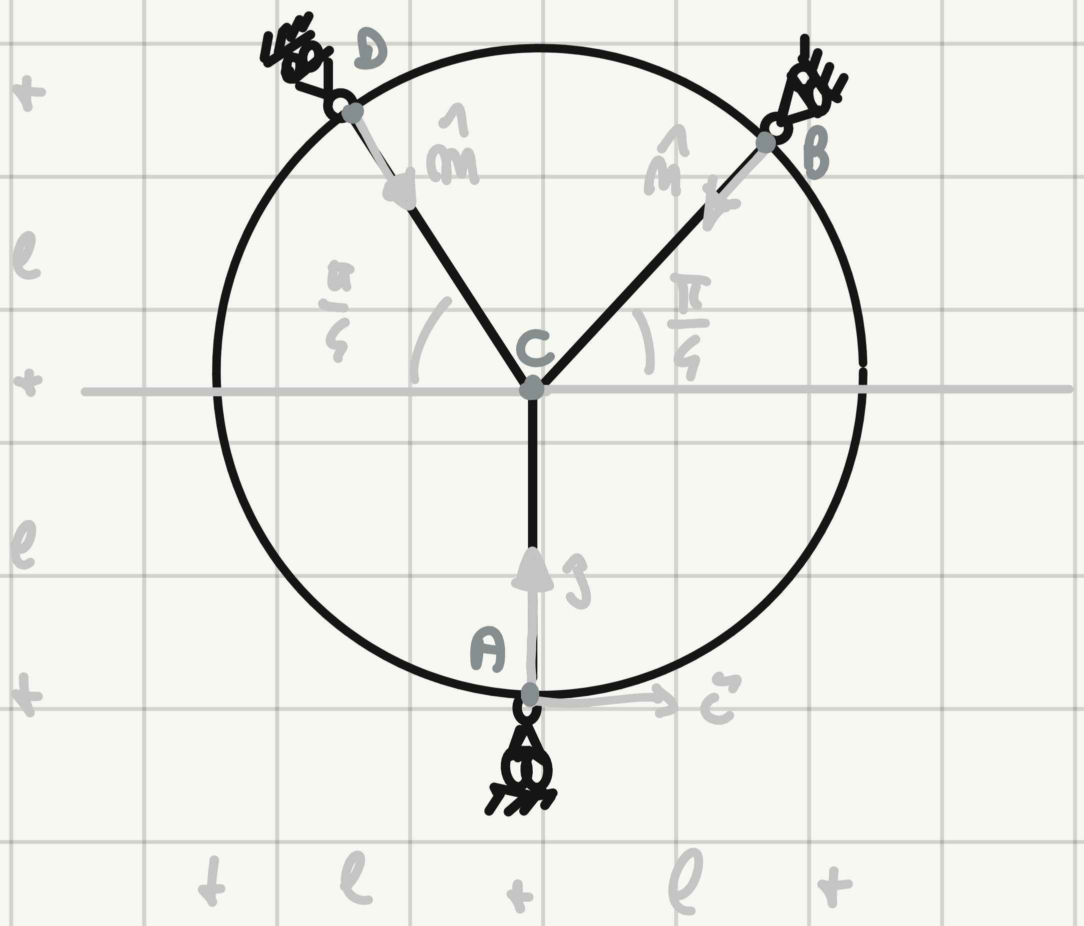
ESERCITAZIONE 1

DETERMINAZIONE DELLA MATRICE CINEMATICA.



- Determinare la matrice cinematica

Scelto come polo il punto A e osservato che gli assi dei due carrelli posti in B e C sono identificati dalla direzione dei due versori $\hat{n}$ ed $\hat{m}$ che possiamo scrivere per componenti come:

$$\{\hat{n}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\hat{m}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Computando il numero dei gradi di libertà osserviamo che sono numericamente pari alle molteplicità dei vincoli:

$$n = m = 3.$$

il sistema è CINEMATICAMENTE DEGENERE poiché gli assi dei carrelli convergono tutti nello stesso punto, che sarà centro di istantanea rotazione per il corpo.

Impostando il problema cinematico:

$$\underline{A}\,\underline{q} = \underline{s}$$

dove:

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \underline{q} \in \mathbb{R}^{3} \quad \text{ed} \quad \underline{s} \in \mathbb{R}^{3}$$

dove in questo caso

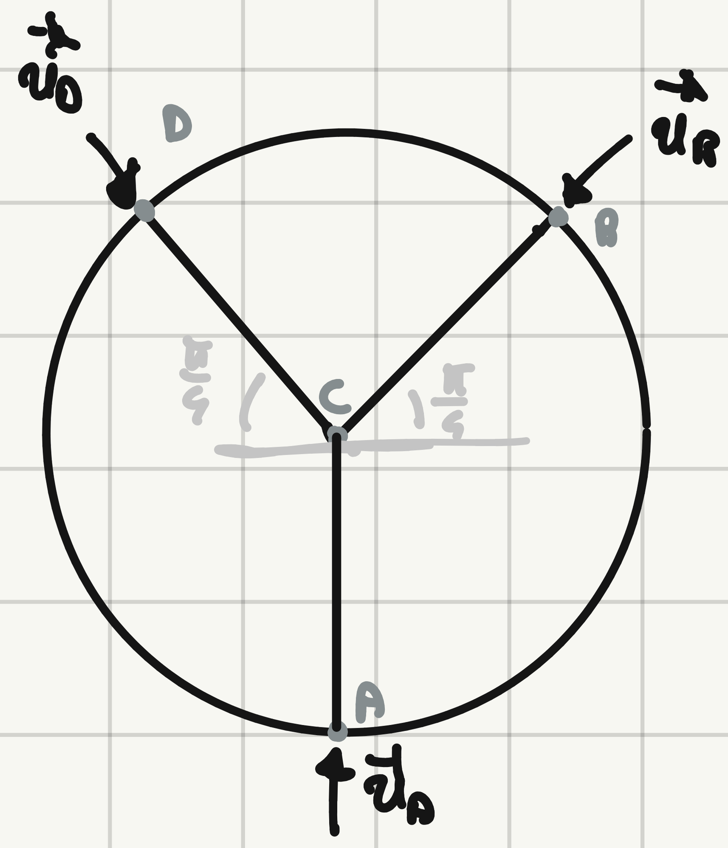
$$\underline{s} = \underline{0}$$

per via dell'assenza di cedimenti nella struttura.

Adesso andiamo a costruire la matrice cinematica, pertanto andiamo a scrivere:

$$\begin{cases} \vec{u}_A \cdot \hat{j} = 0 \\ \vec{u}_B \cdot \hat{n} = 0 \\ \vec{u}_C \cdot \hat{m} = 0 \end{cases}$$

scegliamo come polo di riduzione degli spostamenti il punto A.



otteniamo :

$$\vec{u}_A \cdot \hat{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = 0}$$

$$\vec{u}_B \cdot \hat{n} = 0$$

dove :

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\vartheta} \times \vec{AB}$$

dunque :

$$\left(\vec{u}_A + \vec{\vartheta} \times \vec{AB} \right) \cdot \hat{n} = 0$$

con :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = l\hat{j} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} = l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \left(l\frac{\sqrt{2}}{2} + l\right)\hat{j}$$

$$\vec{\vartheta} = \vartheta \hat{k}$$

$$\hat{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

quindi :

$$\vec{u}_A \cdot \hat{n} + \left(\vec{\vartheta} \cdot \vec{AB} \right) \cdot \hat{n} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A + \hat{n} \times \vec{\vartheta} \cdot \vec{AB} = 0.$$

eseguendo il prodotto misto :

$$\hat{n} \times \vec{\vartheta} \cdot \vec{AB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \right) \times \vartheta\hat{k} \cdot \left[l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \left(l\frac{\sqrt{2}}{2} + l \right)\hat{j} \right]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta$$

ottenendo così la seconda equazione di vincolo

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A + \frac{\sqrt{2}}{2}l\vartheta = 0}$$

infine per la terza equazione di vincolo:

$$\vec{u}_D \cdot \hat{m} = 0$$

con:

$$\vec{v}_D = \vec{u}_A + \vec{\vartheta} \times \vec{AD}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\vec{u}_A + \vec{\vartheta} \times \vec{AD}\right) \cdot \hat{m} = 0$$

dove:

$$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = l\hat{j} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{j}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + l\right)\hat{j}$$

operando il prodotto scalare:

$$\vec{u}_A \cdot \hat{m} + \vec{\vartheta} \times \vec{AD} \cdot \hat{m} = 0$$

che diventa:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A + \hat{m} \times \vec{\vartheta} \cdot \vec{AD} = 0$$

utilizzando le proprietà del prodotto misto.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right) \times \vartheta\hat{k} \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + l\right)\hat{j}\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}l\vartheta.$$

ottenendo così la III° equazione di vincolo:

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}l\vartheta = 0.}$$

III^a equazione di vincolo

in definitiva il problema cinematico:

$$\underline{A}\,\underline{q} = \underline{s}$$

dove $\underline{q}$ è il vettore dei parametri Lagrangiani:

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{dove } \underline{q} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} u_A - \frac{\sqrt{2}}{2} v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} \vartheta l = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} u_A - \frac{\sqrt{2}}{2} v_A - \frac{\sqrt{2}}{2} \vartheta l = 0 \end{cases} \qquad \underline{A}\,\underline{q} = \underline{0}$$

con la matrice di congruenza che assume la forma:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \end{pmatrix}$$

e il determinante:

$$\det \underline{A} = \det \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \end{pmatrix} = 0$$

il sistema dunque é CINEMATICAMENTE DEGENERE.