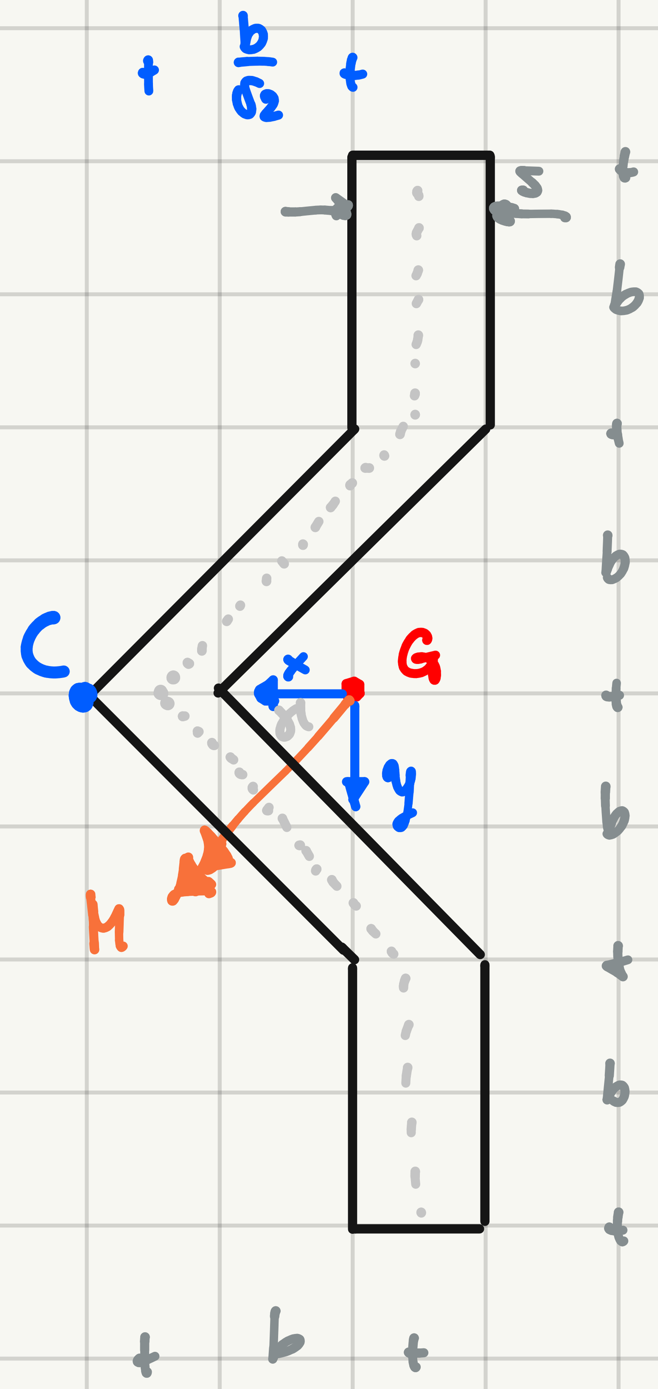
ESERCITAZIONE 10

FLESSIONE DEVIATA



DATI

$s = 2\,cm$ costante per tutta la sezione

$b = 20\,cm$

$\sigma_{AMM} = 18\,kN/cm^2$

$M = 1.6 \times 10^4\,kNcm$

$\gamma = 45°$

- Determinare l'asse neutro e tracciare il diagramma le tensioni normali.

Si tratta di un problema di Saint-Venant di flessione deviata, abbiamo noto la posizione del baricentro, distante circa $b/\sqrt{2}$ rispetto al punto più a sinistra della sezione, osserviamo che è presente anche un asse di simmetria e il sistema di riferimento è centrale d'inerzia.

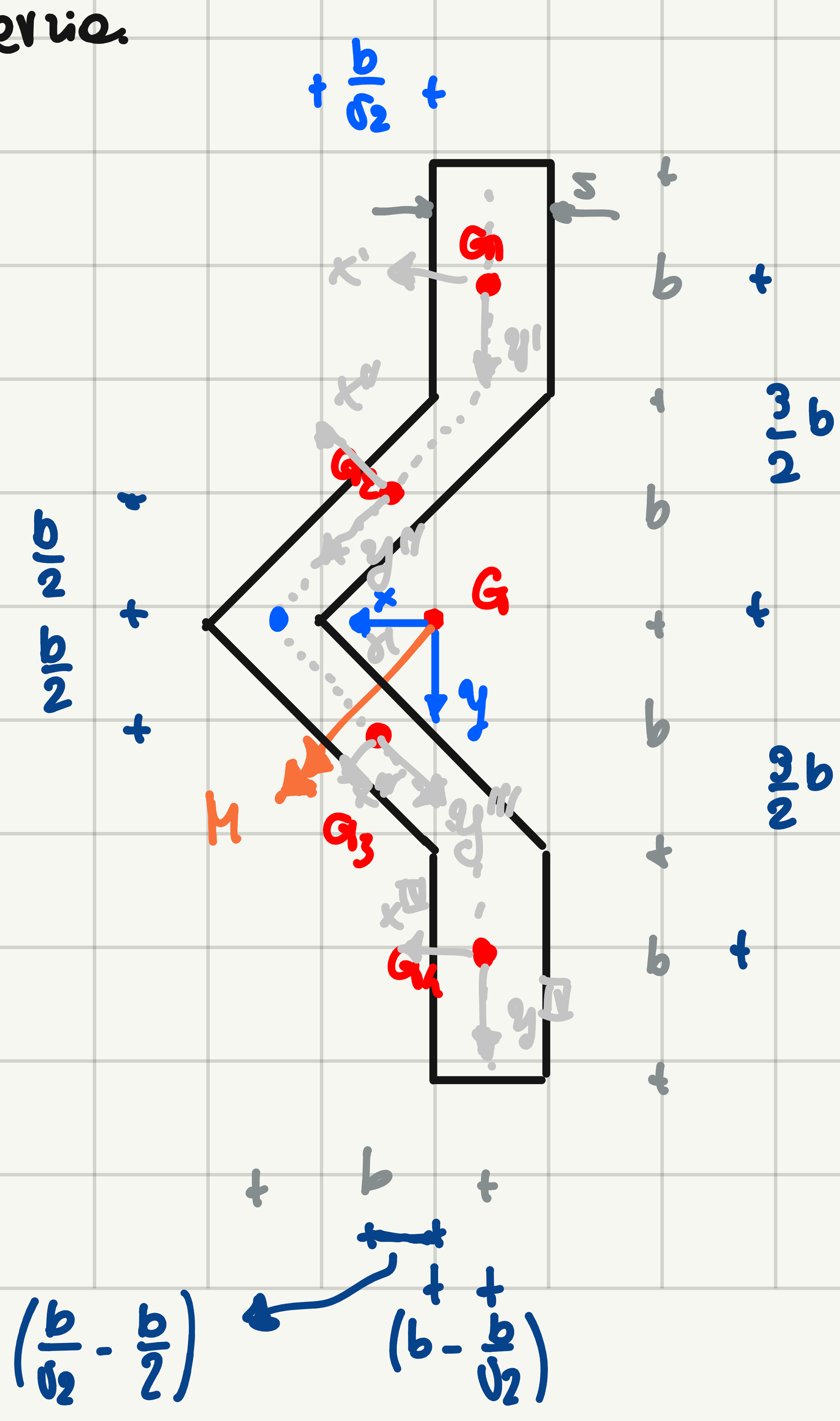
Ricordiamo che per il problema della flessione deviata, gli sforzi indotti dal momento flettente sono puramente normali e sono forniti dalla formula di Navier.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad (1)$$

e l'equazione dell'asse neutro è fornita imponendo uguale a 0 l'eq. 1. dal quale ritroviamo il primo teorema della flessione.

$$\tan\beta = \frac{I_x}{I_y} \tan\gamma.$$

Per risolvere il problema dobbiamo bisogno dei due momenti centrali d'inerzia.



Adesso andiamo a quotare tutte le posizioni delle sottoregioni della nostra sezione. introducendo anche dei sistemi di riferimento centrali locali alle sottosezioni.

Per quanto riguarda il valore dell'area esso vale:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2bs + 2\sqrt{2}\,bs = 2(1+\sqrt{2})bs.$$

Per quanto riguarda il calcolo dei momenti d' inerzia, essi valgono:

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G + I_{x_3}^G + I_{x_4}^G$$
$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G + I_{y_4}^G.$$

dunque:

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} + dx_1^2 A_1 = \frac{1}{12} sb^3 + \left(-\frac{3}{2}b\right)^2 (bs) = \frac{7}{3} sb^3$$

oss. $I_{x_1}^G = I_{x_4}^G$

$$\Rightarrow \quad I_{x_1}^G = I_{x_4}^G = \frac{7}{3} sb^3.$$

Per il calcolo del contributo inerziale della zona di sezione nel quale ci sono i tratti obliqui ci appelliamo alle formule di rotazione; in particolare:

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} \cos^2(45°) + I_y^{G_2} \sin^2(45°) + dx_2^2 A_2$$
$$= \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} (\sqrt{2}b) s^3} + \frac{1}{12} s (\sqrt{2}b)^3 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 (\sqrt{2} b s)$$

NO

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 s + \frac{\sqrt{2}}{4} b^3 s = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 s$$

$$\rightarrow \quad I_{x_2}^G = I_{x_3}^G = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 s.$$

sommando otteniamo:

$$I_x^G = \frac{14}{3} b^3 s + \frac{2}{3}\sqrt{2} b^3 s = \frac{2}{3}(7 + \sqrt{2}) b^3 s.$$

mentre per quanto riguarda il momento centrale d' inerzia rispetto l' asse y.

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G + I_{y_4}^G$$

dunque:

NO

$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + dy_1^2 A_1 = \cancel{\frac{1}{12} bs^3} + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - b\right)^2 bs = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) b^3 s$$

con

$$I_{y_1}^G = I_{y_4}^G = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) b^3 s$$

mentre per

$$I_{y_2}^G = I_{y_3}^G$$

utilizziamo ancora una volta il teorema di rotazione

$$I_{y_2}^{G} = I_{x_2}^{G_2}\left(\frac{1}{2}\right) + I_{y_2}^{G_2}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)^2 (\sqrt{2}\, b s)$$

$$= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{12}(\sqrt{2}\, b)\, s^3} \text{ NO } + \frac{1}{2}\,\frac{1}{12}\, s(\sqrt{2}\, b)^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\, b^3 s$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 s + \frac{3\sqrt{2}}{4} b^3 s - b^3 s = \left(\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1\right) b^3 s$$

sommando otteniamo:

$$I_y^G = 2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) b^3 s + 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1\right) b^3 s$$

$$= (3 - 2\sqrt{2})\, b^3 s + \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - 1\right) b^3 s$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s.$$

in definitiva i momenti centrali d'inerzia valgono:

$$I_x^G = \frac{2}{3}(7 + \sqrt{2})\, b^3 s.$$

$$I_y^G = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s.$$

Una volta noti i momenti d'inerzia, ricordiamo il primo teorema della flessione dove:

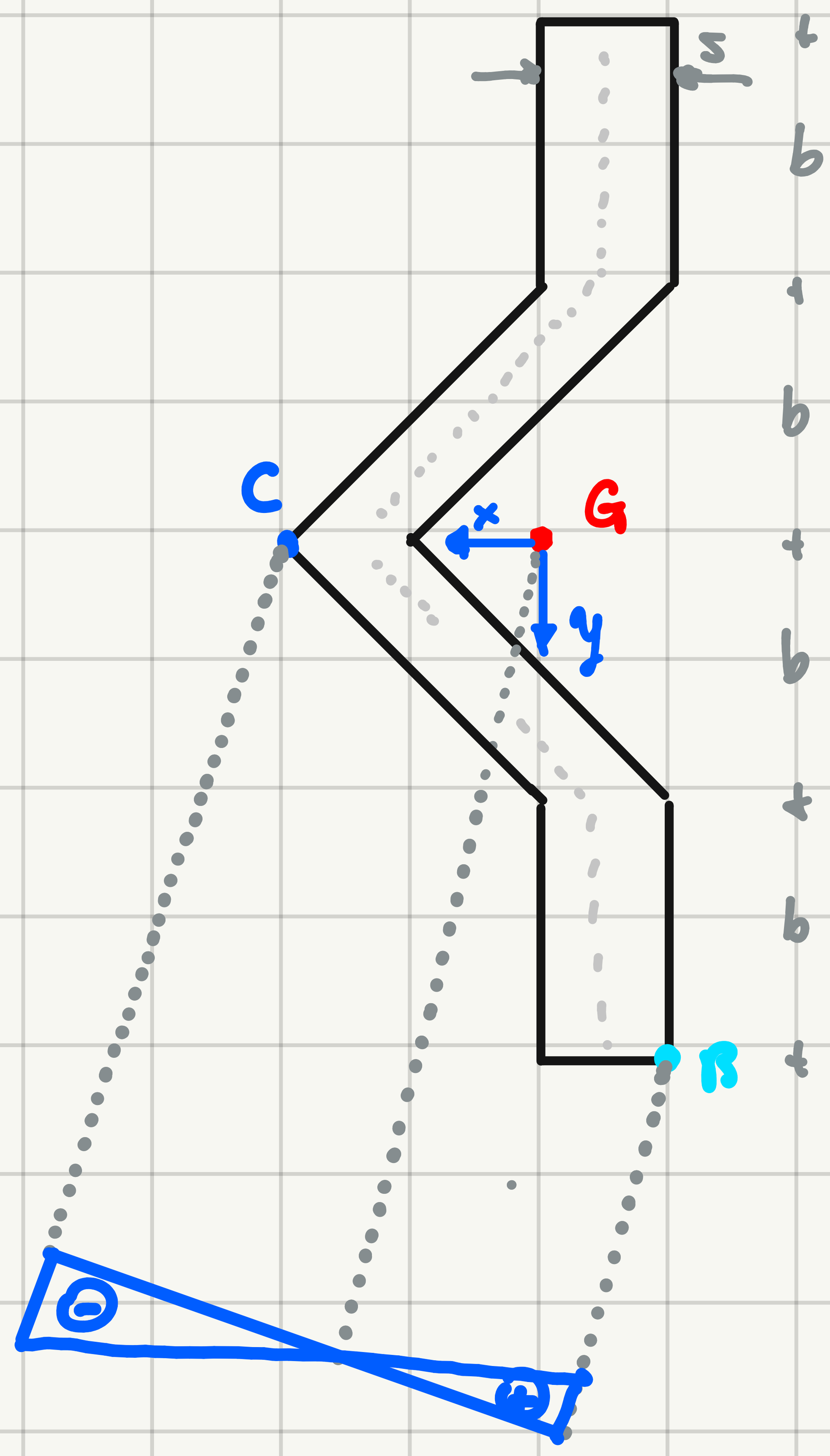
$$\tan\beta = \frac{I_x}{I_y} \cancel{\tan\gamma}^{\,1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(7 + \sqrt{2})\, \cancel{b^3 s}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cancel{b^3 s}} = \frac{2\,(7 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})}$$

$$= 10.61$$

dal quale ritroviamo il valore dell'angolo per α:

$$\tan^{-1}(10.61) = 84{,}61^\circ$$



Dall' ispezione del diagramma dello sforzo normale emerge che il punto C e' il più sollecitato della sezione.

Pertanto, ricordando la formula di Navier, avremo :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ossia:

$$\sigma_z = \frac{M \cos\gamma}{\frac{2}{3}(7+\sqrt{2})b^3 s} y - \frac{M \sin\gamma}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s} x = \frac{\sqrt{2}/2}{\frac{2}{3}\left(7+\sqrt{2}\right)b^3 s} M y - \frac{\sqrt{2}/2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s} \cdot M x.$$

ricordando le coordinate del punto C otteniamo:

$$C = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\sigma_C = -M \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^{\cancel{3}} s} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{\sqrt{2}}} = - \frac{1}{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^2 s} = -18.91 \ kN/cm^2 \Rightarrow |\sigma_C| = 18.91 \ kN/cm^2.$$

che confrontandolo con il valore di $\sigma_z^{AMM} = 18 kN/cm^2$. in modulo il valore di σ_C é maggiore, pertanto la sezione non é in campo elastico.