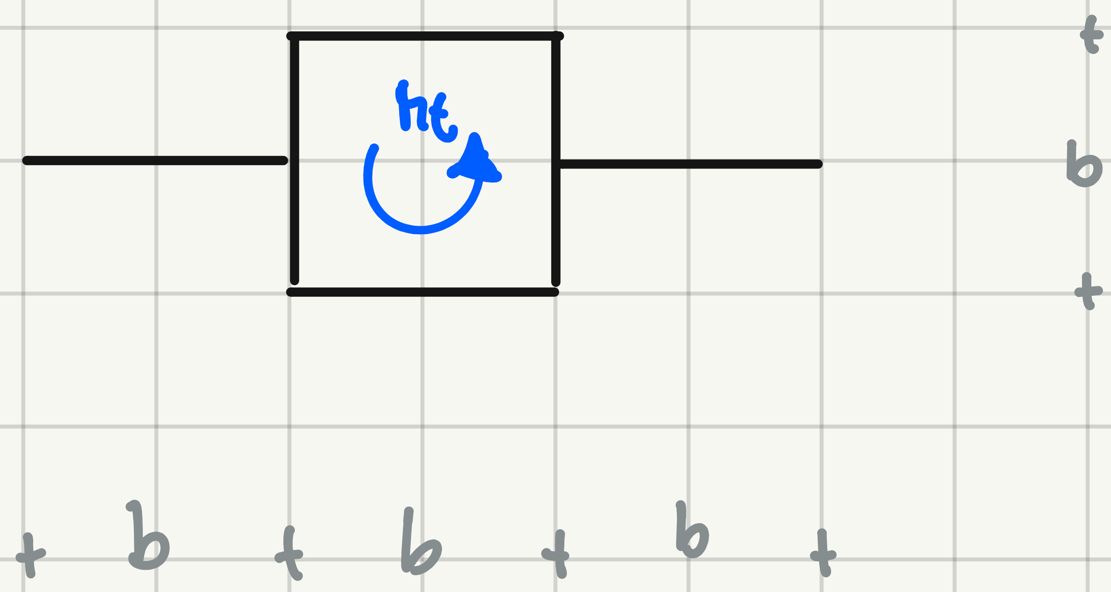
ESERCITAZIONE 11



DATI

$M_t > 0$ $\quad G = 81$ GPa

$b = 5$ cm

$s = 0{,}5$ cm

$l = 200$ cm

$M_t = 10$ kN cm

Si tratta di un problema di Saint Venant di torsione uniforme, nel quale abbiamo una sezione composta da due "ali" che possiamo considerare come sezioni rettangolari a spessore sottile, mentre l'anima come una sezione quadrata cava.

Calcoliamo il momento d'inerzia torsionale:

$$I_t = \sum_i I_{t_i}$$

dove

$$I_{t_1} = I_{t_3} = \frac{1}{3} a s^3 = \frac{1}{3} b s^3$$

mentre per il calcolo del momento d'inerzia torsionale della sezione chiusa, ricordiamo la seconda formula di Bredt.

$$I_{t_2} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{dt}{s}}$$

dove:

$$\begin{cases} \oint \frac{dt}{s} = \frac{1}{s}\int_0^{4b} dt = \frac{4b}{s} \\ \Omega = b^2 \end{cases}$$

quindi:

$$I_{t_2} = \frac{4b^4}{\frac{4b}{s}} = b^3 s$$

in definitiva il momento d'inerzia torsionale della nostra sezione è pari a:

$$I_t = \frac{2}{3} b s^3 + b^3 s$$

Noto il momento d'inerzia torsionale possiamo andare a calcolare la rotazione della sezione all'estremo libero indotta dal momento torcente. In particolare ricordando la definizione di angolo unitario di torsione

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{M_t}{G\, b^3 s}.$$

per la rotazione relativa :

$$\vartheta_\ell = \vartheta(\ell) = \Theta \ell = \frac{M_t}{G I_t}\ell$$

pertanto abbiamo:

$$\vartheta_\ell = \frac{M_t}{G I_t}\ell = \frac{(10\ \text{kNcm})}{(81\ \text{GPa})(62{,}5\ \text{cm}^4)}\cdot(200\ \text{cm})$$

convertendo:

$$\begin{cases} 10\ \text{kNcm} = 10\times10^3\ \text{Ncm} \\ 81\ \text{GPa} = 81\times10^5\ \text{N/cm}^2 \end{cases}$$

otteniamo :

$$\vartheta_\ell = \frac{(10\times10^3\ \cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{cm}})}{(81\times10^5\ \cancel{\text{N}/\text{cm}^2})(62{,}5\ \cancel{\text{cm}^4})}\cdot(200\ \cancel{\text{cm}}) = 0.0039\ \text{rad}.$$

Infine, andiamo a valutare il valore della forza tangenziale max.

$$\tau_{max_1} = \frac{M_{t_1}}{I_{t_1}}s \qquad \tau_{max_3} = \frac{M_{t_3}}{I_{t_3}}s$$

facendo attenzione al fatto che il momento torcente si ripartisce sulle sezioni in questa maniera:

$$M_{t_i} = \frac{I_{t_i}}{I_t} M_t.$$

contributo inerziale offerto dalla sezione in questione.

momento torcente complessivo

$$\text{pertanto} \quad M_{t_1} = M_{t_3} = \frac{I_{t_1}}{I_t}M_t = \frac{\frac{1}{3}bs^3}{62.5\text{cm}^4}(10\times10^3\ \text{Ncm}) = 33{,}3\ \text{Ncm}.$$

$$M_t = M_{t_2} = \frac{I_{t_2}}{I_t}M_t = \frac{\cancel{b^3 s}}{\cancel{b^3 s}}(10\times10^3\ \text{Ncm}) = 10\times10^3\ \text{Ncm}.$$

dunque lo sforzo tangenziale massimo lo avremo nella parte chiusa, dunque:

$$\tau_{max_2} = \frac{M_t}{2 \Omega S} = \frac{(10 \times 10^3 \text{ Ncm})}{2\,(25 \text{ cm}^2)(0.5 \text{cm})} = 4 \times 10^2 \text{ N/cm}^2.$$

$$\tau_{max,1} = \frac{M_{t_1}}{I_t} S = 79.92 \text{ Ncm.}$$