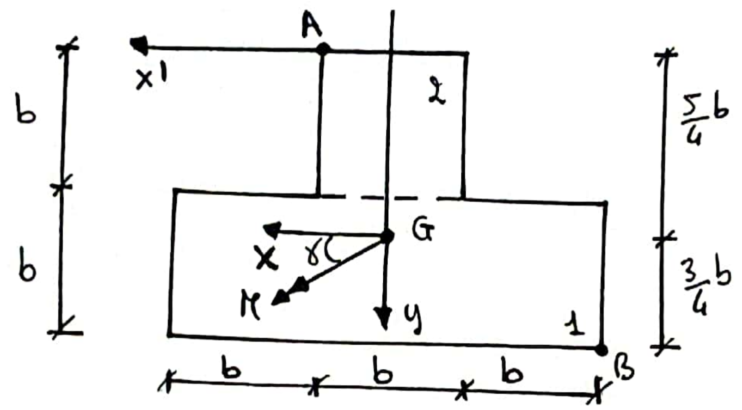
Esercitazione 10: Flessione Deviata

Consegna: Tracciare l'asse neutro e la distribuzione delle tensioni tangenziali per $\gamma = \pi/6$ e $\gamma = \pi/3$. In entrambi i casi determinare le tensioni normali massime e minime.



Svolgimento: Si tratta di un problema di Saint-Venant di flessione deviata. La figura ha asse di simmetria y, pertanto il momento statico S_y è nullo ($S_y = \emptyset$) e di conseguenza $x_G = \frac{S_y}{A} = \emptyset$. Pertanto il sistema di riferimento è un sistema centrale di inerzia.

Gli sforzi indotti dal momento flettente sono sforzi puramente normali, ricavati dalla formula di Navier:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad \leftarrow \text{Formula di Navier}$$

Ponendo uguale a zero l'eq. di Navier, si ricava il primo Teorema della flessione, dal quale a sua volta è possibile ricavare l'eq. dell'asse neutro:

$$\tan\beta = \frac{I_x}{I_y} \tan\gamma \quad \leftarrow \text{Primo Teorema della Flessione}$$

Pertanto per risolvere il problema è necessario ricavare i due momenti principali di inerzia.

Determino dapprima le caratteristiche della geometria della sezione; dividendo la figura in due sottoaree:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 3b \cdot b = 3b^2 \\ A_2 &= b \cdot b = b^2 \end{aligned}\right\} A = A_1 + A_2 = 3b^2 + b^2 = 4b^2$$

Dalla geometria delle figure ricavo le coordinate dei baricentri rispetto al sistema di riferimento x', y:

$$x_{G_1} = \varnothing \qquad y_{G_1} = \frac{3}{2}b \qquad S_{x_1} = y_{G_1} \cdot A_1 = \frac{3}{2}b \cdot 3b^2 = \frac{9}{2}b^3$$

$$x_{G_2} = \varnothing \qquad y_{G_2} = \frac{b}{2} \qquad S_{x_2} = y_{G_2} \cdot A_2 = \frac{b}{2} \cdot b^2 = \frac{b^3}{2}$$

Pertanto le coordinate del baricentro dell'intera figura sono:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \varnothing \quad e \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{5b^{\cancel{3}}}{4\cancel{b^2}} = \frac{5}{4}b$$

$$\Rightarrow \quad G(\varnothing ; \tfrac{5}{4}b)$$

Adesso posso calcolare i momenti principali di inerzia tramite le formule notevoli e le formule del trasporto:

$$I_{x_1} = \frac{3b \cdot b^3}{12} + \left(\frac{b}{4}\right)^2 \cdot (3b^2) = \frac{\cancel{3}b^4}{\cancel{12}\,4} + \frac{3}{16}b^4 = \frac{4b^4 + 3b^4}{16} = \frac{7}{16}b^4$$

$$I_{x_2} = \frac{b \cdot b^3}{12} + \left(\frac{3}{4}b\right)^2 \cdot (b^2) = \frac{b^4}{12} + \frac{9}{16}b^4 = \frac{16b^4 + 108b^4}{192} = \frac{124}{192}b^4 = \frac{31}{48}b^4$$

$$\Rightarrow I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{7}{16}b^4 + \frac{31}{48}b^4 = \frac{21b^4 + 31b^4}{48} = \frac{52b^4}{48} = \frac{13}{12}b^4$$

$$I_{y_1} = \frac{b \cdot (3b)^3}{12} = \frac{27b^4}{12} = \frac{9}{4}b^4$$

$$I_{y_2} = \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{12} \qquad \Rightarrow I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{9}{4}b^4 + \frac{b^4}{12} = \frac{7}{3}b^4$$

Dal primo teorema della flessione ricavo il valore dell'angolo β:

$$\tan\beta = \frac{I_x}{I_y}\tan\gamma \quad con \quad \gamma = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{13}{12}\cancel{b^4} \cdot \frac{3}{7\cancel{b^4}} \cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{13}{28} \cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{13}{28} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,268$$

$$\Rightarrow \quad \beta = tg^{-1}[0,268] = 15°$$

Ora noti i momenti principali di inerzia, si può ricavare l'eq. dell'asse neutro, conoscendo il suo angolo di inclinazione β rispetto all'asse x:

$$y = tg\beta\, x \qquad \text{dove} \quad tg\beta = \frac{I_x}{I_y} \cdot tg\gamma = 0,268$$

$\Rightarrow$ l'equazione dell'asse neutro è: $y = 0,268 \cdot x$.

Adesso ricordando la formula di Navier, ricavo la tensione normale:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad M_x = M\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}M$$

$$M_y = M\,\text{sen}\,\gamma = \frac{M}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{\sqrt{3}}{2}M \cdot \frac{12}{13b^4} y - \frac{M}{2} \cdot \frac{3}{7b^4} x = \frac{0,8}{b^4} My - \frac{0,21}{b^4} Mx$$

Per ricavare le tensioni normali massime e minime, considero i punti più sollecitati, ovvero quelli posti a distanza maggiore dall'asse neutro, quindi A e B.

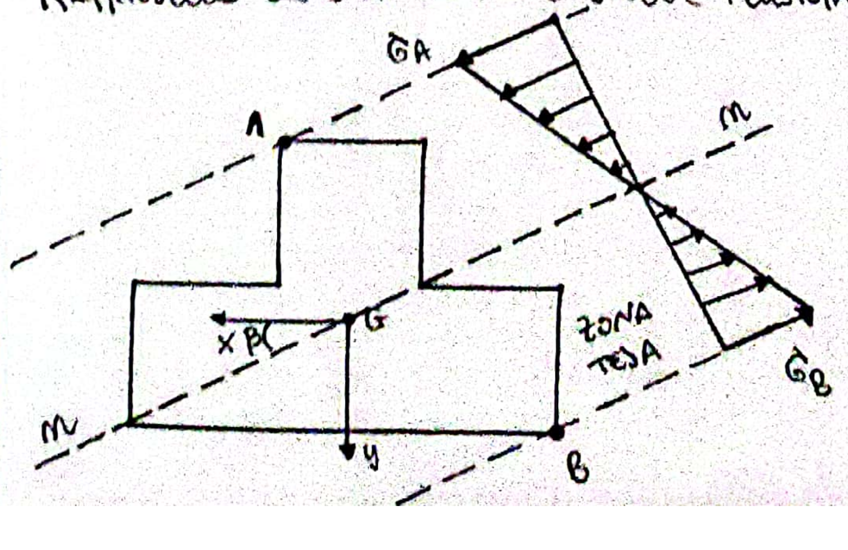
Dalla figura trovo le coordinate di A e B:

$$A\left(\frac{b}{2}; -\frac{5}{4}b\right) \qquad \Rightarrow \quad \sigma_A = \frac{0,8M}{b^4} \cdot \left(-\frac{5}{4}b\right) - \frac{0,21}{b^4} M \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{1,11\,M}{b^3}$$

$$B\left(-\frac{3}{2}b; \frac{3}{4}b\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_B = \frac{0,8M}{b^4} \cdot \left(\frac{3}{4}b\right) - \frac{0,21}{b^4} M \cdot \left(-\frac{3}{2}b\right) = \frac{0,92M}{b^3}$$

Rappresento la distribuzione delle tensioni:



Ora ripeto l'esercizio considerando $\gamma = \frac{\pi}{3}$; la parte sulle considerazioni geometriche della sezione rimane identica, così come il calcolo dei momenti principali di inerzia.

È invece necessario calcolare il nuovo angolo di inclinazione dell'asse neutro per $\gamma = \frac{\pi}{3}$:

dal primo teorema della flessione $\tan\beta = \frac{I_x}{I_y}\cdot tg\,\gamma$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{13}{28}\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{13}{28}\cdot\sqrt{3} = 0{,}8$$

$$\Rightarrow \beta = tg^{-1}[0{,}8] \cong 39° \Rightarrow y = tg\,\beta\cdot x = 0{,}8\cdot x$$ Eq. asse neutro.

Dalla formula di Navier ricavo la tensione normale:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x \qquad M_x = M\cos\gamma = \frac{M}{2} \qquad M_y = M\,\mathrm{sen}\,\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}M$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M}{2}y\cdot\frac{12}{13b^4} - \frac{\sqrt{3}}{2}M\cdot\frac{3}{7b^4}x = \frac{6}{13b^4}My - \frac{3\sqrt{3}}{14b^4}Mx = \frac{0{,}46}{b^4}My - \frac{0{,}37}{b^4}Mx$$

Pertanto le tensioni normali massime e minime sono:

$$\sigma_A = \frac{0{,}46}{b^4}\left(-\frac{5}{4}b\right)M - \frac{0{,}37}{b^4}\left(\frac{b}{2}\right)M = -\frac{0{,}575M}{b^3} - \frac{0{,}185M}{b^3} = -\frac{0{,}76M}{b^3}$$

$$\sigma_B = \frac{0{,}46}{b^4}\left(\frac{3}{4}b\right)M - \frac{0{,}37}{b^4}\left(-\frac{3}{2}b\right)M = \frac{0{,}345M}{b^3} + \frac{0{,}555M}{b^3} = \frac{0{,}9M}{b^3}$$