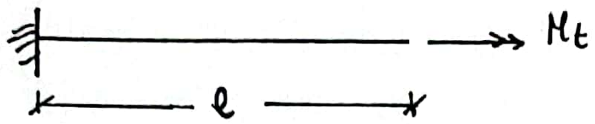
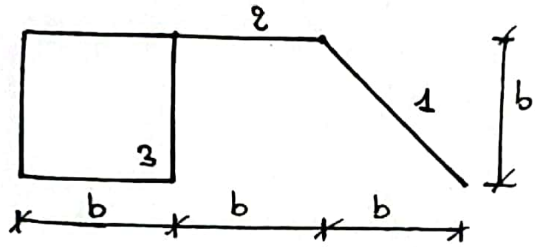
Esercitazione 11: Torsione nelle sezioni sottili composte

Consegna: La trave tubolare in figura ha spessore costante s.
La trave è soggetta a momento torcente $Mt = 10 kN \cdot cm$
Si assuma: $l = 300\ cm$, $b = 5\ cm$, $s = 0,5\ cm$, $G = 30\ GPa$





Si calcoli:
1) l'angolo unitario di torsione;
2) la tensione tangenziale massima nel tratto 1;
3) la tensione tangenziale massima nel tratto 2;
4) la tensione tangenziale massima nella porzione chiusa 3.

Svolgimento: È un problema di Saint-Venant di torsione uniforme. La sezione è composta rispettivamente da due rettangoli sottili (1 e 2), e da una sezione quadrata chiusa (3).

1) Per ricavare l'angolo unitario di torsione, si utilizza la seguente relazione:

$$\Theta = \frac{Mt}{G I_t}$$

Necessito quindi del momento di inerzia torsionale I_t, che nel caso della sezione composta dai due rettangoli sottili, può essere ricavato ricorrendo alle formule relative alla teoria dei rettangoli sottili; mentre nel caso della sezione chiusa sottile si ricorre alla Teoria di Bredt:

$$I_t = \sum_i I_{t_i}$$

dove: $$I_{t_1} = \frac{1}{3} a s^3 = \frac{1}{3} b\sqrt{2}\, s^3 \qquad \text{con } a = b\sqrt{2}$$

$$I_{t_2} = \frac{1}{3} a s^3 = \frac{1}{3} b s^3 \quad \text{con } a = b$$

$$I_{t_3} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{dt}{s}} \qquad \text{dove:} \begin{cases} \oint \frac{dt}{s} = \frac{1}{s}\int_0^{4b} dt = \frac{4b}{s} \\ \Omega = b^2 \end{cases}$$

Quindi: $I_{t_3} = \dfrac{4(b^2)^2}{\frac{4b}{s}} = \dfrac{\cancel{4}b^{\cancel{4}\,3}}{\frac{\cancel{4b}}{s}} = b^3 s$

Pertanto il momento di inerzia torsionale dell'intera sezione è:

$$I_t = \sum_i I_{t_i} = I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3} = \frac{1}{3} b\sqrt{2}\, s^3 + \frac{1}{3} b s^3 + b^3 s \simeq b^3 s \cong 62{,}5 \text{ cm}^4$$

Possiamo ora calcolare l'angolo unitario di torsione:

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{100 \text{ Nm}}{30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 62{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} = 5{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

mentre la rotazione della sezione all'estremo libero indotta dal momento torcente, è data da:

$$\theta = \Theta \cdot l = 5{,}33 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 15{,}99 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Adesso, per calcolare le tensioni tangenziali massime nel tratto 1 e 2, e nella porzione chiusa 3, dobbiamo dapprima ricavare il momento torcente sulle singole sezioni, mediante la seguente relazione:

$$M_{t_i} = \frac{I_{t_i}}{I_t} \cdot M_t$$

dove: I_{t_i} = momento di inerzia torsionale della sezione in questione;

I_t = momento di inerzia torsionale dell'intera sezione;

M_t = momento torcente complessivo.

Quindi avremo rispettivamente:

$$Mt_1 = \frac{It_1}{It} \cdot Mt = \frac{\frac{1}{3} b\sqrt{2} s^3}{62{,}5\ cm^4} \cdot (10 \cdot 10^3\ Ncm) = 47{,}14\ Ncm$$

$$Mt_2 = \frac{It_2}{It} \cdot Mt = \frac{\frac{1}{3} b s^3}{62{,}5\ cm^4} \cdot (10 \cdot 10^3\ Ncm) = 33{,}3\ Ncm$$

$$Mt_3 = \frac{It_3}{It} \cdot Mt = \frac{b^3 s}{62{,}5\ cm} \cdot (10 \cdot 10^3\ Ncm) = 10 \cdot 10^3\ Ncm$$

Posso ora calcolare le tensioni tangenziali massime,

$$\tau_{max,1} = \frac{Mt_1}{It_1} \cdot s = 79{,}99\ N/cm^2 \cong 0{,}8\ MPa$$

Andamento lineare, nullo lungo la linea media, massimo ai bordi.

$$\tau_{max,2} = \frac{Mt_2}{It_2} \cdot s = 79{,}92\ N/cm^2 \cong 0{,}8\ MPa$$

$$\tau_{max,3} = \frac{Mt_3}{2\Omega s} = \frac{Mt}{2\Omega s} = 400\ N/cm^2 \cong 4\ MPa$$

Andamento costante lungo tutto lo spessore.