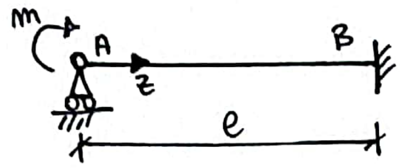
Esercitazione 3: Metodo degli spostamenti

Consegna: Si studi il problema flessionale per la seguente struttura con il metodo degli spostamenti, assumendo EI costante e $GA_t \to +\infty$.



Svolgimento: La struttura è costituita da una trave appoggiata-incastrata, la quale presenta un carrello esterno in A e un incastro in B. Pertanto la molteplicità complessiva è $m=1+3=4$, mentre il numero di gradi di libertà è $n=3$. Poiché $m>n$, la struttura è iperstatica.

Per studiare la struttura è necessario utilizzare le equazioni del problema elastico, considerando il caso puramente flessionale:

$$\begin{cases} \chi(z) = -v''(z) = \varphi'(z) \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \\ \chi(z) = \dfrac{M(z)}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi(z) = -v''(z) \\ T'(z) = -q(z) \\ M'(z) = T(z) \\ \chi(z) = \dfrac{M(z)}{EI} \end{cases}$$

Si sceglie come funzione incognita lo spostamento trasversale $v(z)$, e si ricava l'Eq. della linea elastica o eq. della trave inflessa:

Si parte dall'equazione di legame costitutivo $\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$, e si ricava il momento $M(z) = \chi(z) \cdot EI$, da cui ricordando che $\chi(z) = -v''(z)$, allora: $M(z) = -EI\,v''(z)$, dove ho espresso $M(z)$ in funzione di $v(z)$.

- Dalla seconda equazione della statica, si ricava che:
  $T(z) = -EI\,v'''(z)$, dove ho espresso $T(z)$ in funzione di $v(z)$.

  Faccio un ulteriore passaggio e derivo la seconda equazione della statica:

  $M''(z) - T'(z) = 0 \Rightarrow M''(z) = T'(z)$

  Ricordando che $T'(z) + q(z) = 0$, sostituisco $T'(z) = -q(z)$ e ottengo:

  $$M''(z) = -q(z) \Rightarrow -[EI\,v''(z)]'' = -q(z)$$

  Pertanto l'Equazione della linea elastica è data da:

  $$EI\,v^{IV}(z) = q(z)$$

Per ricavare l'equazione dell'abbassamento $v(z)$, integro l'eq. della linea elastica, sapendo che $q(z)=0$:

$$\Rightarrow \quad v^{IV}(z)=0$$
$$v'''(z)=C_1$$
$$v''(z)=zC_1+C_2$$
$$v'(z)=\frac{z^2}{2}C_1+zC_2+C_3$$
$$v(z)=\frac{z^3}{6}C_1+\frac{z^2}{2}C_2+zC_3+C_4$$

Per trovare il valore delle quattro costanti di integrazione, mi servono quattro condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0)=0 \\ M(0)=-EI\,v''(0)=m \\ v(l)=0 \\ \varphi(l)=-v'(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4=0 \\ C_2=-\frac{m}{EI} \\ \frac{l^3}{6}C_1-\frac{l^2}{2}\frac{m}{EI}+lC_3=0 \\ \frac{l^2}{2}C_1+lC_2+lC_3=0 \Rightarrow \frac{l}{2}C_1-\frac{lm}{EI}+C_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_4=0 \\ C_2=-\frac{m}{EI} \\ C_1=\frac{3}{2}\frac{m}{lEI} \\ C_3=-\frac{l^2}{2}C_1+l\frac{m}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4=0 \\ C_2=-\frac{m}{EI} \\ C_1=\frac{3}{2}\frac{m}{lEI} \\ C_3=\frac{lm}{4EI} \end{cases}$$

Sostituendo le costanti trovate nella soluzione generale, si ottiene:

$$v(z)=\frac{z^3}{4}\frac{m}{lEI}-\frac{z^2}{2}\frac{m}{EI}+\frac{z\,ml}{4EI}$$

$$v'(z)=\frac{3}{4}\frac{mz^2}{lEI}-\frac{mz}{EI}+\frac{lm}{4EI}$$

Poiché $\varphi(z)=-v'(z) \Rightarrow \varphi(z)=-\frac{3}{4}\frac{mz^2}{lEI}+\frac{mz}{EI}-\frac{lm}{4EI}$

Mentre le equazioni di taglio e momento risultano:

$$T(z)=-v'''(z)\cdot EI \Rightarrow T(z)=-\frac{3}{2}\frac{m}{l}$$

$$M(z)=-v''(z)\cdot EI \Rightarrow M(z)=-\frac{3}{2}\frac{m}{l}z+m=m\left(1-\frac{3}{2}\frac{z}{l}\right)$$

Le rotazioni agli estremi della sezione valgono:

$$\varphi_A(0)=-\frac{lm}{4EI} \quad ; \quad \varphi_B(l)=0$$

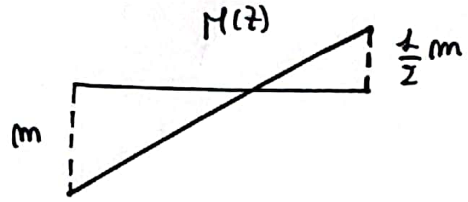
(oraria)

L'espressione analitica del momento flettente e il suo diagramma sono:

$$M(z) = -v''(z)\cdot EI = m\left(1-\frac{3}{2}\frac{z}{l}\right)$$

$M(0) = m$

$M(l) = -\frac{1}{2} m$



Rappresento infine la deformata della linea d'asse della trave:

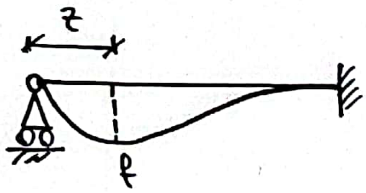
$$v'(z) = \emptyset \Rightarrow \frac{3}{4}\frac{m z^2}{l EI} - \frac{m z}{EI} + \frac{l m}{4 EI} = \emptyset$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{m}{EI} \pm \sqrt{\frac{m^2}{EI^2} - \frac{3}{4}\frac{m^2}{EI^2}}}{\frac{3}{2}\frac{m}{l EI}} = \frac{\frac{m}{EI} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4EI^2}}}{\frac{3}{2}\frac{m}{l EI}} =$$

$$= \frac{\frac{m}{EI} \pm \frac{m}{2EI}}{\frac{3}{2}\frac{m}{l EI}} \to z_1 = l \quad \to \boxed{z_2 = \frac{1}{3} l}$$

$\Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{3} l$

$\Rightarrow v\left(\frac{1}{3} l\right) = \frac{m l^2}{27 EI} = f$



[redacted]