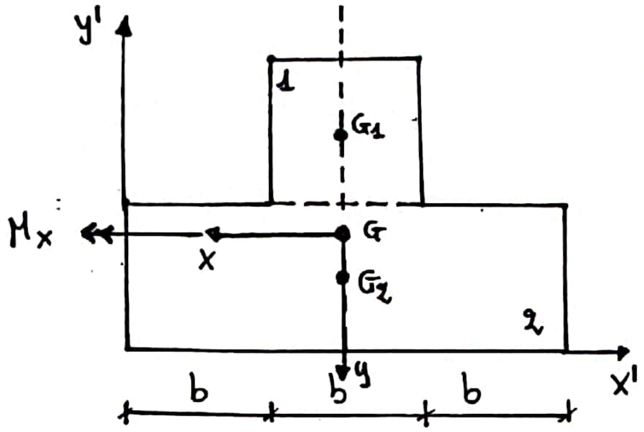
Esercitazione 8: Flessione Retta

Consegna: Assumendo che il materiale sia in grado di sostenere una tensione normale massima σ_{amm}, determinare il massimo momento flettente M_x che la trave è in grado di sostenere.



Svolgimento: Per risolvere il problema utilizzo il procedimento del predimensionamento di massima nel caso di $M_x = M_x^{MAX}$.

Dalla teoria so che la tensione normale massima è data da:

$$\sigma_z^{MAX} = \frac{M_x^{MAX}}{I_x} y_{MAX}$$

Se si pone $\sigma_z^{MAX} \leq \sigma_{amm}$, si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\sigma_{amm} \geq \frac{M_x^{MAX}}{I_x} y_{MAX} \Rightarrow \sigma_{amm} \geq \frac{M_x^{MAX}}{W_x} \Rightarrow M_x^{MAX} \leq \sigma_{amm} W_x$$

Dove W_x è il modulo di resistenza secondo l'asse x, calcolato come:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{MAX}}$$

devo quindi trovare le coordinate del baricentro della figura e il momento principale di inerzia rispetto all'asse x.

Per prima cosa divido la figura in due sottoaree:

$A_1 = b \cdot b = b^2 \qquad A_2 = 3b \cdot b = 3b^2$

pertanto l'area totale della figura è:

$$A = A_1 + A_2 = b^2 + 3b^2 = 4b^2$$

Essendo figure semplici note (rettangolo), posso ricavare i baricentri rispetto al sistema di riferimento definito da x', y': ②

$$x_{G_1} = b + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b \qquad y_{G_1} = \frac{3}{2}b$$

$$x_{G_2} = b + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b \qquad y_{G_2} = \frac{b}{2}$$

Calcolo quindi i momenti statici:

$$\left.\begin{aligned} S_{x_1} &= y_{G_1} \cdot A_1 = \frac{3}{2}b \cdot b^2 = \frac{3}{2}b^3 \\ S_{x_2} &= y_{G_2} \cdot A_2 = \frac{b}{2} \cdot 3b^2 = \frac{3}{2}b^3 \end{aligned}\right\} S_x = S_{x_1} + S_{x_2} = 3b^3$$

$$\left.\begin{aligned} S_{y_1} &= x_{G_1} \cdot A_1 = \frac{3}{2}b \cdot b^2 = \frac{3}{2}b^3 \\ S_{y_2} &= x_{G_2} \cdot A_2 = \frac{3}{2}b \cdot 3b^2 = \frac{9}{2}b^3 \end{aligned}\right\} S_y = S_{y_1} + S_{y_2} = \frac{12}{2}b^3 = 6b^3$$

Pertanto le coordinate del baricentro G della figura sono:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6b^{\cancel{3}}}{4\cancel{b^2}} = \frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{3}{2}b ; \frac{3}{4}b\right)$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{3b^{\cancel{3}}}{4\cancel{b^2}} = \frac{3}{4}b$$

Adesso posso calcolare i momenti principali di inerzia utilizzando le regole valide per le figure piane, e la regola del trasporto, prima per le due porzioni e poi sommandole dell'intera figura:

$$I_{x_1} = \frac{b \cdot b^3}{12} + \left(\frac{3}{4}b\right)^2 \cdot (b^2) = \frac{b^4}{12} + \frac{9}{16}b^4 = \frac{31}{48}b^4$$

$$I_{x_2} = \frac{3b \cdot b^3}{12} + \left(\frac{b}{4}\right)^2 \cdot (3b^2) = \frac{b^4}{4} + \frac{3}{16}b^4 = \frac{7}{16}b^4$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{13}{12}b^4$$

Quindi il modulo di resistenza è:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{MAX}} = \frac{\frac{13}{12}b^4}{\frac{5}{4}b} = \frac{13}{15}b^3 \qquad \text{dove } y_{MAX} = 2b - \frac{3}{4}b = \frac{5}{4}b$$

Infine calcolo il massimo momento flettente M_x^{MAX} che la trave è in grado di sostenere:

$$M_x^{MAX} \leq \sigma_{amm} W_x \longrightarrow M_x^{MAX} = \sigma_{amm} \cdot \frac{13}{15}b^3$$