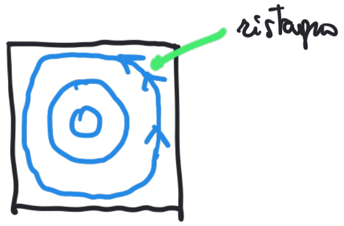
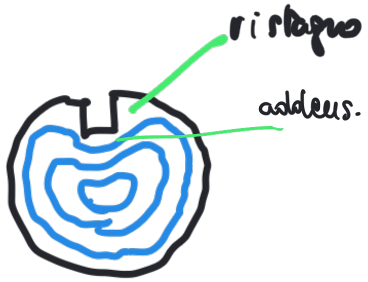
ANALOGIA IDRODINAMICA

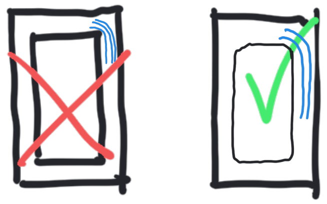
$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\tau} = \tau_{zx}\,\underline{i} + \tau_{zy}\,\underline{j}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\underline{\tau} = 0$$

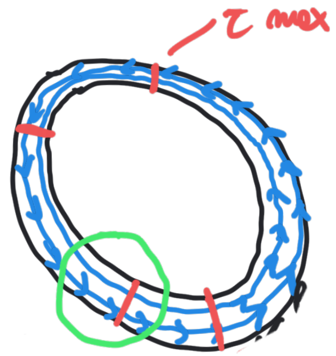
$$\mathrm{rot}\,\underline{\tau} = 2G\Theta\,\underline{k}$$



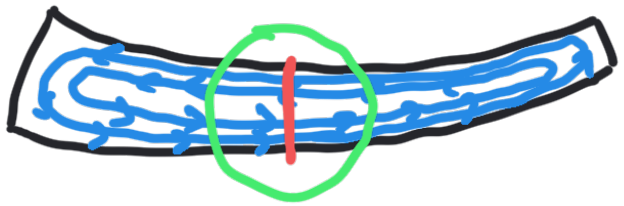


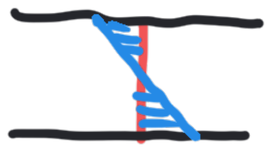


sez. parete sottile

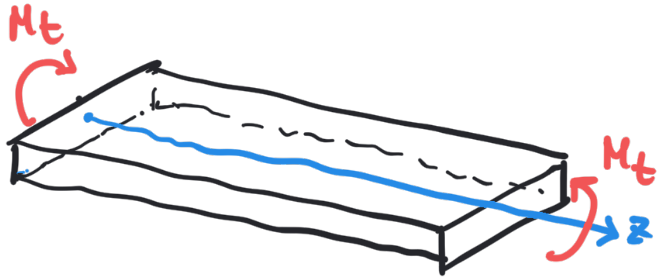


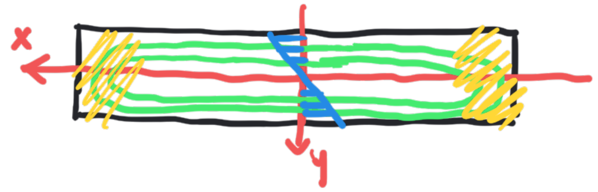
sezione in parete sottile aperta



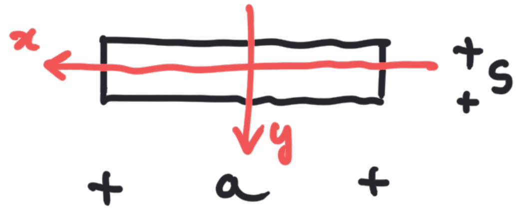


Sez. rettangolare sottile





$$\tau_{zx}(y) = -2\,\frac{M_t}{I_t}\,y$$



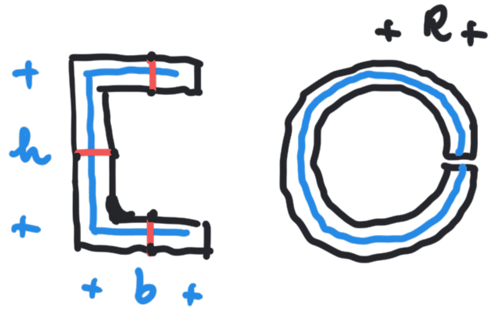
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t}\,s = \frac{3M_t}{a s^2}$$

$a >> s$

Sezioni rettificabili

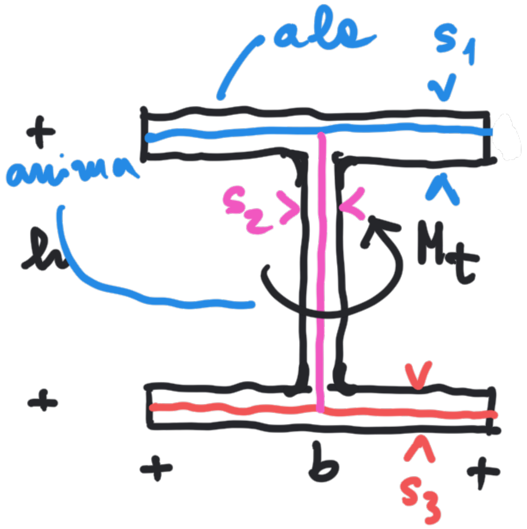
$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

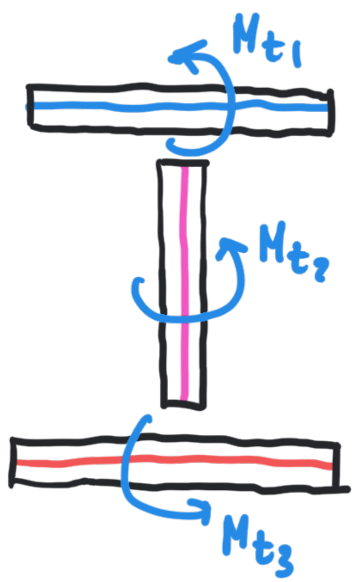
$G I_t$: rigidezza torsionale



$$\boxed{I_t = \frac{1}{3} a s^3}$$

Sezioni aperte composte da rettangoli sottili.





ripartizione momento torcente:

$$M_{t_i} = \cancel{G} I_{t_i} \frac{M_t}{\cancel{G} I_t} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_t}$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{t_i}}{I_{t_i}} s_i = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

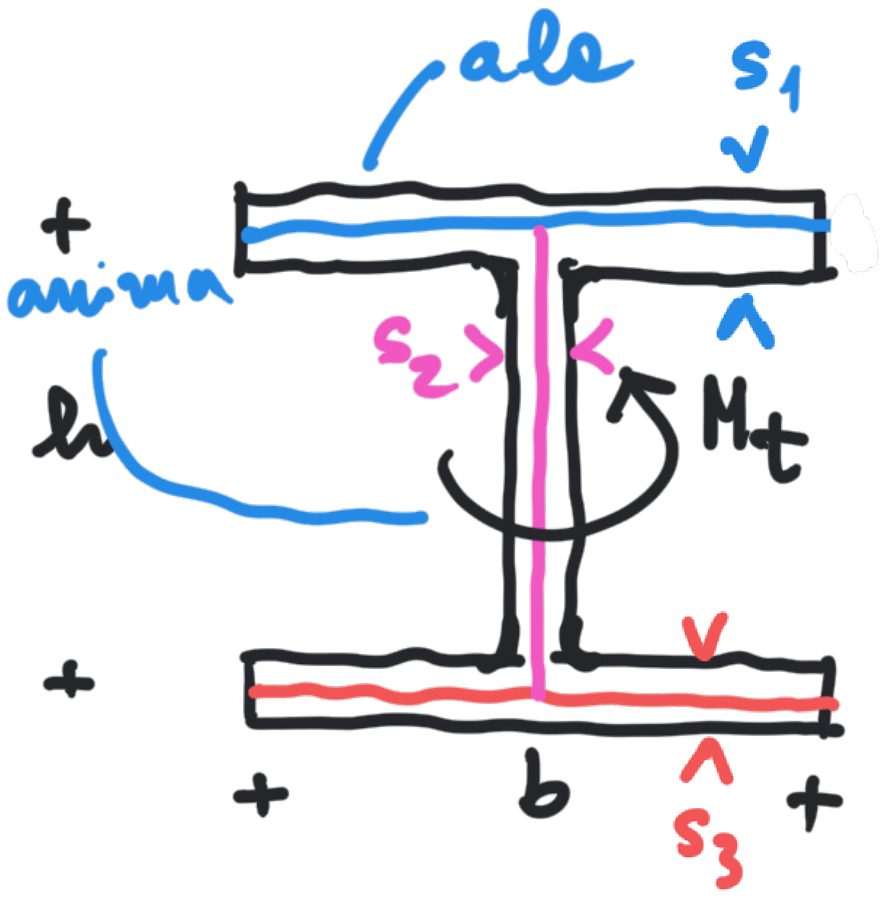
$$M_{t_i} = G I_{t_i} \theta'$$

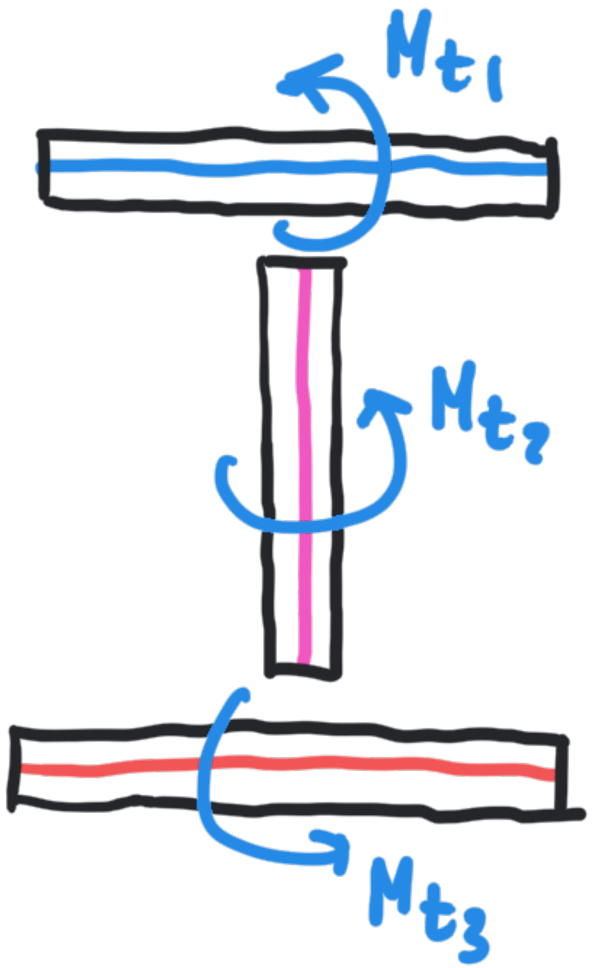
$$M_t = \sum_{i=1}^{3} M_{t_i} = G(I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3}) \theta' = G I_t \theta'$$

$$I_{t_1} = \tfrac{1}{3} b s_1^3 \qquad I_{t_2} = \tfrac{1}{3} h s_2^3 \qquad I_{t_3} = \tfrac{1}{3} b s_3^3$$

$$I_t = \tfrac{1}{3} b (s_1^3 + s_3^3) + \tfrac{1}{3} h s_2^3$$

Sezioni aperte composte da rettangoli sottili.





ripartizione momento torcente:

$$\boxed{M_{t_i} = \cancel{G} I_{t_i} \frac{M_t}{\cancel{G} I_t} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_t}}$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{t_i}}{I_{t_i}} s_i = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

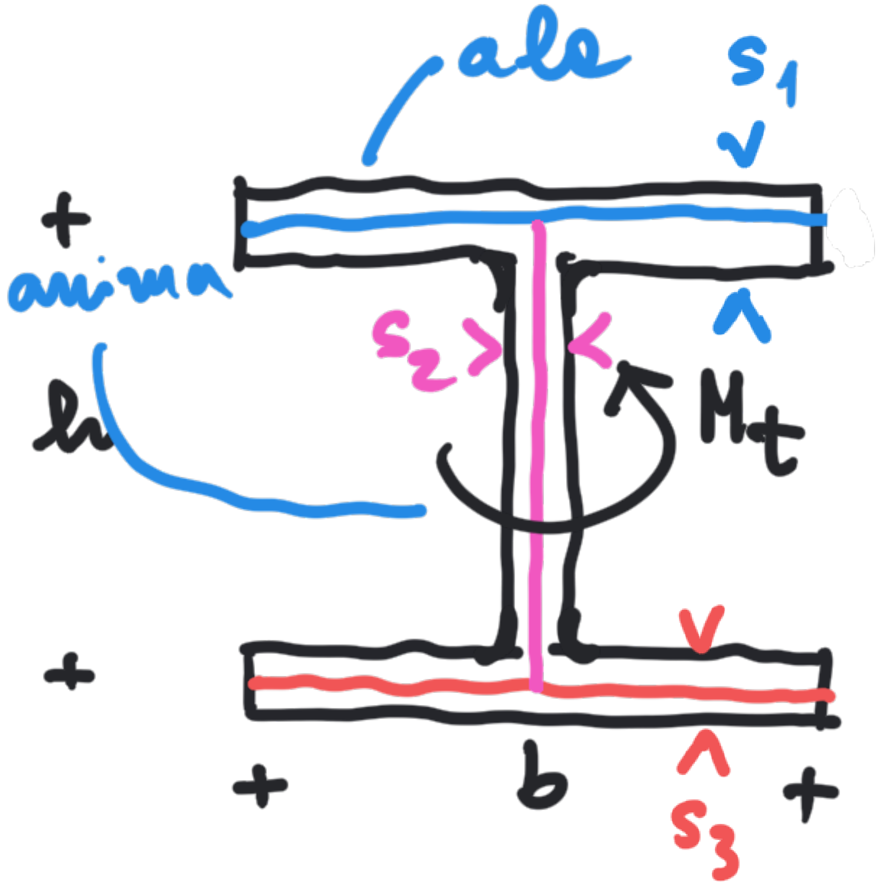
$$M_{t_i} = G I_{t_i} \theta'$$

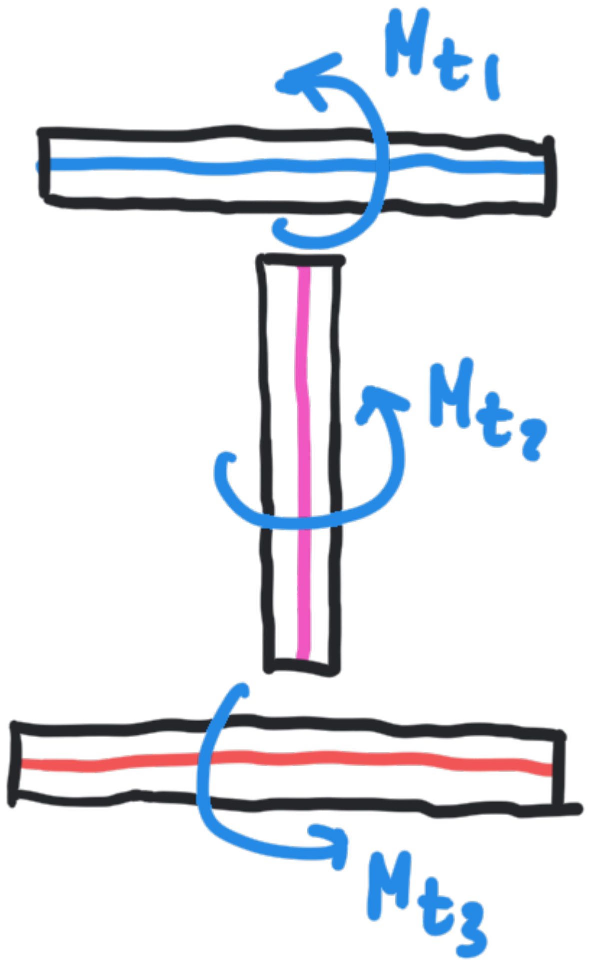
$$M_t = \sum_{i=1}^{3} M_{t_i} = G(I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3})\theta' = G I_t \theta'$$

<u>Oss</u>: ogni rettangolo è sottoposto a una frazione di M_t proporzionale alla propria inerzia torsionale

<u>Oss</u>: Il rettangolo più sollecitato è quello avente spessore massimo.

Sezioni aperte composte da rettangoli sottili.





ripartizione momento torcente:

$$M_{t_i} = \cancel{G} I_{t_i} \frac{M_t}{\cancel{G} I_t} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_t}$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{t_i}}{I_{t_i}} s_i = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

$$M_{t_i} = G I_{t_i} \Theta$$

$$M_t = \sum_{i=1}^{3} M_{t_i} = G(I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3})\Theta = G I_t \Theta$$

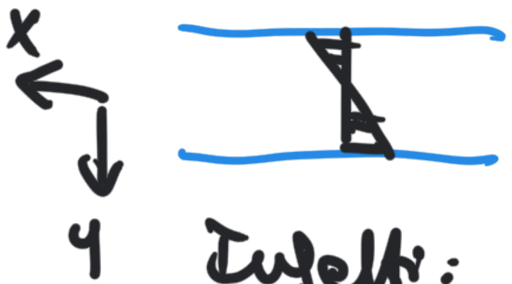
$$I_{t_1} = \tfrac{1}{3} b s_1^3 \qquad I_{t_2} = \tfrac{1}{3} h s_2^3 \qquad I_{t_3} = \tfrac{1}{3} b s_3^3$$

! questa formula vale solo se la sezione è <u>aperta</u>

Osservazioni (facoltative)

La formula $\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$ per la sezione rettangolare sottile si ottiene dalla relazione

$$\text{rot}\,\underline{\tau} = 2G\Theta\underline{k} \qquad (\text{Eq. } 20.53)$$



Infatti: $\text{rot}\,\underline{\tau} = \left(\cancel{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right)\underline{k}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\Theta$$

quindi essendo $\tau_{zx} = 0$ sulla linea media,

$$\tau_{zx}(y) = -2G\Theta y$$

Il massimo della tensione tangenziale si ha per $y = -s/2 \Rightarrow \tau_{max} = G\Theta s = \frac{M_t}{I_t}s$

$$= \frac{M_t s}{\frac{1}{3}bs^3} = \frac{3M_t}{bs^2}$$

Osservazione

Dalla formula (20.55) $\tau_{max} = 3 \dfrac{M_t}{a s^2}$

risulta che la τ_{max} è, a parità del resto, tanto più piccola quanto maggiore è lo spessore.

'dizione

con il fatto che, in una sezione composta costituita da rettangoli sottili, la τ_{max} si rilevi nel rettangolo con spessore maggiore.

Si ricordi però che la frazione di momento torcente assorbita dal rettangolo è proporzionale alla sua inerzia torsionale, che è proporzionale al cubo di s! Quindi, l'i-esimo rettangolo ha una τ_{max}

$$\tau_{max_i} = 3 \frac{M_{t_i}}{a_i s_i^2}$$

e $M_{t_i} = \frac{1}{3} a_i s_i^3 \dfrac{M_t}{I_t}$

quindi $\tau_{max_i} = s_i \dfrac{M_t}{I_t}$