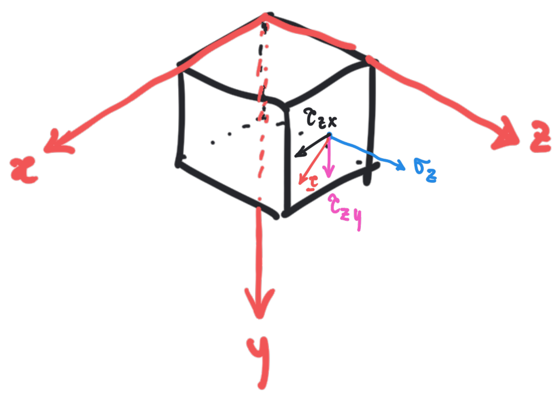
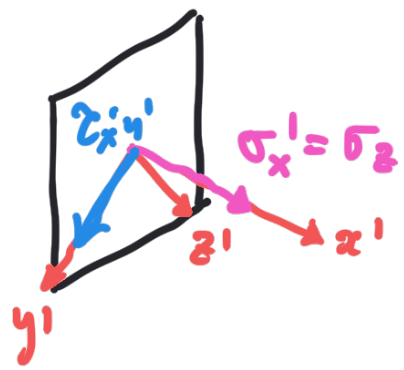
Saint-Venant

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



$$(*) \qquad [\underline{T}]' = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{x'} = \sigma_z := \sigma$$

$$\tau_{x'y'} = |\underline{\tau}| := \tau$$

Memo:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{idT} &= \max\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \\ \sigma_{idHHM} &= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2} \end{aligned}\right\} = ?$$

Adoperando un riferimento opportuno possiamo rappresentare il tensore dello sforzo nella forma (*), dove τ è il modulo del vettore delle tensioni tangenziali.

Questa forma si presta più agevolmente alla determinazione delle tensioni principali.

Saint-Venant

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

$$[\underline{T}]' = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\underline{T}]'' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \sigma-\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\sigma-\lambda) - \tau^2$$

$$\lambda^2 - \sigma\lambda - \tau^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

Memo:

$$\sigma_{id\,T} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$$

$$\sigma_{id\,HHM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad = ?$$

Per calcolare le tensioni ideali non conviene usare le espressioni di σ_1 e σ_2. È più conveniente procedere per altra via.

OSS:

$$(*)\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=\sigma \\ \sigma_1\sigma_2=-\tau^2\end{cases}$$

traccia e det della sottom. 2x2 (invarianti)

$$\boxed{\sigma_{id\,HMM}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}}$$

$$[\underline{T}]'=\begin{bmatrix}\sigma & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad [\underline{T}]''=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(*)_1 \Rightarrow \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2=\sigma^2$$

$$\|$$

$$\sigma_{id\,HMM}^2+3\sigma_1\sigma_2$$

$$\| \ (*)_2$$

$$\sigma_{id\,HMM}^2-3\tau^2$$

Memo:

$$\sigma_{id\,T}=\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$$

$$\sigma_{id\,HMM}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}$$

Si osserva che le sottomatrici evidenziate in blu hanno gli stessi invarianti (traccia e determinante). Ne segue la $(*)$, dalla quale, con qualche passaggio si ottiene direttamente l'espressione di $\sigma_{id\,HMM}$.

Oss:

$$(*)\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=\sigma\\ \sigma_1\sigma_2=-\tau^2\end{cases}$$

traccia e det della sottom. 2x2 (invarianti)

$$\boxed{\sigma_{id\,HMH}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}}$$

$$\boxed{\sigma_{id\,T}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}$$

$$|\sigma_1-\sigma_2|^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2=\sigma^2+4\tau^2 \Rightarrow |\sigma_1-\sigma_2|=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$(\sim)\Rightarrow \sigma_1^2+\sigma_2^2=\sigma^2-2\sigma_1\sigma_2=\sigma^2+2\tau^2\le\sigma^2+4\tau^2$$

$$\Rightarrow |\sigma_1|,|\sigma_2|\le|\sigma_1-\sigma_2|$$

$$(*)_1\Rightarrow \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2=\sigma^2 \quad (\sim)$$

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2 = \sigma^2_{id\,HMH}+3\sigma_1\sigma_2 \overset{(*)_2}{=} \sigma^2_{id\,HMH}-3\tau^2$$

Memo:

$$\sigma_{id\,T}=\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$$

$$\sigma_{id\,HMH}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}$$

Dei passaggi un pochino più elaborati permettono di ricavare anche la tensione ideale secondo Tresca. Si noti che Tresca attribuisce allo stato tensionale $\underline{T}$ una tensione ideale maggiore di quella secondo von Mises, e che le due coincidono quando $\tau=0$ (stato uniassiale).